**Учреждения СПО**

**Тема:** «Учебно-методические указания для выполнения практических занятий по дисциплине «Элементы математической логики»

**Автор:** **Третьяк Ирина Юрьевна,** преподаватель математики и специальных дисциплин ОГАПОУ «Белгородский индустриальный колледж».

**Рецензент:** Балабанова Т.Н., заведующий кафедрой естественно-математического и технологического образования ОГАОУ ДПО «БелИРО», кандидат технических наук.

**Пояснительная записка**

Учебно-методические указания для организации практических занятий по дисциплине «Элементы математической логики» предназначены для обучающихся по специальности 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах». Представленный методический материал разработан на основе рабочей программы по дисциплине «Элементы математической логики», разработанной в свою очередь, на основе примерной программы по данной дисциплине.

Дисциплина «Элементы математической логики» изучается в III семестре согласно учебного плана по специальности 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах». Рабочей программой предусмотрено 20 часов на выполнение практических занятий. На занятие отводится 2 академических часа.

Целью настоящих методических указаний является комплексное содействие обучающимся в выполнении практических занятий по дисциплине «Элементы математической логики», качественное выполнение которых в полной мере способствует освоить обязательный минимум содержания дисциплины и подготовиться к промежуточной аттестации в форме дифференцируемого зачета.

Представленные методические указания способствуют формированию личностных, предметных результатов, а также содействуют образованию метапредметных результатов.

Настоящие методические указания содержат 10 практических занятий, и включают в себя следующие элементы: название темы, цель занятия или нескольких занятий, предусмотренных по данной теме, теоретическую часть и практическую часть.

В теоретической части приводится структурированный материал, необходимый для подготовки обучающихся к практическому занятию.

Содержание практических работ позволяет освоить практические приемы составления таблиц истинности для формул алгебры логики, практические приемы выполнения равносильных преобразований формул алгебры логики и логики предикатов, научиться решать логические задачи методами алгебры логики, применять средства языка логики предикатов для записи и анализа математических предложений, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; применять математические методы для решения профессиональных задач; овладеть техникой равносильных преобразований логических формул, методами распознавания тождественно истинных формул и равносильных формул, навыками решения основных задач математической логики и методами их решения.

Тема 1 Высказывания и операции над ними

*Практическая работа № 1*«*Определение значения истинности высказываний. Построение составных высказываний»*

**Цель:** Получение практических навыков построения формул логики высказываний, анализа их свойств.

**Материальное обеспечение*:*** практическая работа.

**Общие теоретические положения**

Основным понятием математической логики является понятие «простого высказывания». Под высказыванием обычно понимают всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, и при этом мы можем сказать, истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическими значениями высказываний являются «истина» и «ложь».

**Примеры высказываний.**   
        1) Москва стоит на Неве.   
        2) Лондон — столица Англии.   
        3) Сокол не рыба.   
        4) Число 6 делится на 2 и на 3.   
Высказывания 2), 3), 4) истинны, а высказывание 1) ложно.   
    Очевидно, предложение «Да здравствует Россия!» не является высказыванием.

Различают два вида высказываний.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть простым или элементарным. Примерами элементарных высказываний могут служить высказывания 1) и 2).

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью грамматических связок «не», «и», «или», «если .... то ...», «тогда и только тогда», принято называть сложными или составными.

Так, высказывание 3) получается из простого высказывания «Сокол - рыба» с помощью отрицания «не», высказывание 4) образовано из элементарных высказываний «Число 6 делится на 2», «Число 6 делится на З», соединенных союзом «и».

Аналогично сложные высказывания могут быть получены из простых высказываний с помощью грамматических связок «или», «тогда и только тогда».

В алгебре логики все высказывания рассматриваются только с точки зрения их логического значения, а от их житейского содержания отвлекаются. Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Элементарные высказывания обозначаются малыми буквами латинского алфавита: *х, у, z, ..., а, b, с, ...;* истинное значение высказывания цифрой 1, а ложное значение - буквой цифрой 0.

Если высказывание *а* истинно, то будем писать *а = 1*, а если *а* ложно, то *а = 0*.

**Логические операции над высказываниями**

***Отрицанием высказывания*** *х* называется новое высказывание , которое является истинным, если высказывание *х*ложно, и ложным, если высказывание *х* истинно.

Отрицание высказывания *х* обозначается , и читается*«не х»*или*«неверно,что х»*.

Логические значения высказывания, можноописатьспомощьютаблицы.

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

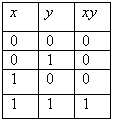
Таблицы такого вида принято называть таблицами истинности.

Пусть *х* высказывание. Так как такжеявляетсявысказыванием,томожнообразоватьотрицаниевысказывания,тоестьвысказывание,котороеназываетсядвойнымотрицаниемвысказывания*х*.Ясно,чтологическиезначениявысказываний*х*исовпадают.

Например,длявысказывания«ПутинпрезидентРоссии»отрицаниембудетвысказывание«ПутиннепрезидентРоссии»,адвойнымотрицаниембудетвысказывание«Неверно,чтоПутиннепрезидентРоссии».

***Конъюнкцией****(логическимумножением)двухвысказыванийхиу*называетсяновоевысказывание,котороесчитаетсяистинным,еслиобавысказывания*хиу*истинны,иложным,еслихотябыодноизних ложно. Конъюнкция высказываний *хиу* обозначается символом *х&у( xy, ху)*читается*«хиу»*.Высказывания *хиу* называются членами конъюнкции.

Логическиезначенияконъюнкцииописываютсяследующейтаблицейистинности:

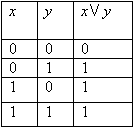


Например,длявысказываний«6делитсяна2»,«6делитсяна3»ихконъюнкциейбудетвысказывание«6делитсяна2и6делитсяна3»,которое,очевидно,истинно.

Изопределенияоперацииконъюнкциивидно,чтосоюз«и»валгебрелогикиупотребляетсявтомжесмысле,чтоивповседневнойречи.Новобычнойречинепринятосоединятьсоюзом«и»двавысказываниядалекихдруготдругапосодержанию,авалгебрелогикирассматриваетсяконъюнкциядвухлюбыхвысказываний.

***Дизъюнкцией****(логическимсложением)двухвысказыванийхиу*называетсяновоевысказывание,котороесчитаетсяистинным,еслихотябыодноизвысказываний*х,у*истинно,иложным,еслиониобаложны.Дизъюнкциявысказываний*х,у*обозначаетсясимволом*«xу»*,читается*«хилиу»*.Высказывания *х,у* называются членами дизъюнкции.

Логическиезначениядизъюнкцииописываютсяследующейтаблицейистинности:

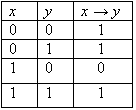


Вповседневнойречисоюз«или»употребляетсявразличномсмысле:исключающеминеисключающем.Валгебрелогикисоюз«или»всегдаупотребляетсявнеисключающемсмысле.

***Импликацией****двухвысказыванийхиу*называетсяновоевысказывание,котороесчитаетсяложным,еслихистинно,ау-ложно,иистиннымвовсехостальныхслучаях.

Импликация высказываний *х,у* обозначается символом*http://www.kvadromir.com/math/mnogestvo/7a.gif*,читается*«еслих,тоу»или«изхследуету».*Высказывание*х*называютусловиемилипосылкой,высказывание*у*-следствиемилизаключением,высказывание*http://www.kvadromir.com/math/mnogestvo/7a.gif*следование милиимпликацией.

Логическиезначенияоперацииимпликацииописываютсяследующейтаблицейистинности:

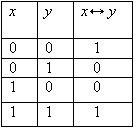


Употребление слов «если....то...»валгебрелогикиотличаетсяотупотребленияихвобыденнойречи,гдемы,какправило,считаем,что,есливысказывание*х*ложно,товысказывание*«Еслих,тоу»*вообщенеимеетсмысла.Крометого,строяпредложениевида*«еслих,тоу»*вобыденнойречи,мывсегдаподразумеваем,чтопредложение*у*вытекаетизпредложения*х*.Употреблениеслов«если...,то...»вматематическойлогикенетребуетэтого,посколькувнейсмыслвысказыванийнерассматривается.  
Импликацияиграетважнуюрольвматематическихдоказательствах,таккакмногиетеоремыформулируютсявусловнойформе*«Еслих,тоу».*Еслиприэтомизвестно,что*х*истинноидоказанаистинностьимпликации*http://www.kvadromir.com/math/mnogestvo/7a.gif*,то мы вправе сделать вывод об истинности заключения *у*.

***Эквивалентностью****двухвысказыванийхиу*называетсяновоевысказывание,котороесчитаетсяистинным,когдаобавысказывания*х,у*либоодновременноистинны,либоодновременноложны.

Эквивалентность высказываний *х,у* обозначается символомhttp://www.kvadromir.com/math/mnogestvo/7b.gif,читается*«длятого,чтобых,необходимоидостаточно,чтобыу»или«хтогдаитолькотогда,когдау».*Высказывания*х,у*называютсячленамиэквивалентности.

Логическиезначенияоперацииэквивалентностиописываютсяследующейтаблицейистинности:



Эквивалентностьиграетважнуюрольвматематическихдоказательствах.Известно,чтозначительноечислотеоремформулируетсявформенеобходимыхидостаточныхусловий,тоестьвформеэквивалентности.Вэтомслучае,знаяобистинностиилиложностиодногоиздвухчленовэквивалентностиидоказавистинностьсамойэквивалентности,мызак­лючаемобистинностиилиложностивторогочленаэквивалентности.

**Практическая часть**

Практическая работа № 1

***Тема:****Определение значения истинности высказываний. Построение составных высказываний.*

**Задание к работе:**

1.Установитьлогическуюструктуруследующихпредложенийизаписатьихнаязыкелогикивысказываний:

1. Если металл нагревается, он плавится.
2. Неправда, что философскиеспорынеразрешимы.
3. Деньги-продуктстихийногоразвитиятоварныхотношений,анерезультатдоговоренностииликакого-либоиногосознательногоакта.

2.Записатьлогическойформулойследующиевысказывания:

1. если на улице дождь, то нужно взять с собой зонт или остаться дома;
2. если - прямоугольный и стороны - равны, то

3.Проверитьистинностьвысказывания:

1. Чтобы завтра пойти на занятия, я должен встать рано. Если я сегодня пойду в кино, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, то встану поздно. Следовательно, либо я не пойду в кино, либо не пойду на занятия.
2. Я пойду либо в кино, либо в бассейн. Если я пойду в кино, то получу эстетическое удовольствие. Если я пойду в бассейн, то получу физическое удовольствие. Следовательно, если я получу физическое удовольствие, то не получу эстетического удовольствия.

4.Навопрос: «Кто из трех студентов изучал дискретную математику?»получен верный ответ:«Если изучал первый, то изучали третий, но неверно, что если изучал второй, то изучали третий».Кто изучал дискретную математику?

5.Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

Если первый сдал, то и второй сдал;

Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал;

Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал;

Если четвертый сдал, то и первый сдал.

**Порядок выполнения работы:**

1.Изучитьинструкциюкпрактическойработе.

2.Выполнитьзадание.

3.Оформитьотчет.

**Содержание отчета:**

1.Тема.

2.Цель.

3.Материальноеобеспечение.

4.Практическоезадание.

**Вопросы для самоконтроля:**

1.Какиеэлементывходятязыклогики?

2.Какиеспособыустановленияобщезначимостиформулылогикивызнаете?

Тема 2 Формулы алгебры высказываний

*Практическая работа № 2 «Составление таблиц истинности для формул»*

*Практическая работа № 3 «Упрощение формул»*

**Цель:** отработать навыки в составлении таблиц истинности; научиться упрощать логические выражения, применяя формулы.

**Материальное обеспечение**: практическая работа.

**Общие теоретические положения**

***Алгоритм построения таблиц истинности для сложных выражений:***

1. Определить количество строк:

***количествострок=2n+строкадлязаголовка***, ***n***-количество простых высказываний.

1. Определить количество столбцов:

***количествостолбцов=количествопеременных+количествологическихопераций***;

* определить количество переменных (простых выражений);
* определить количество логических операций и последовательность их выполнения.

1. Заполнитьстолбцырезультатамивыполнениялогическихоперацийвобозначеннойпоследовательностисучетомтаблицистинностиосновныхлогическихопераций.

***Пример:*** Составить таблицу истинности логического выражения:

***D=¬А&(BC)***.

Решение:

1. Определить количество строк:

навходетрипростыхвысказывания:***А,В,С***поэтомуn=3иколичествострок=23+1=9.

1. Определить количество столбцов:
   * Простые выражения(переменные):***А,В,С***;
   * промежуточные результаты (логические операции):

***¬ А*** - инверсия (обозначим через ***E***);

***B C*** - операция дизъюнкции (обозначим через ***F***);

а также искомое окончательное значение арифметического выражения:

***D = ¬ А & (B C)***. т.е. ***D = E & F*** - это операция конъюнкции.

1. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **C** | **E** | **F** | **E&F** |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

***Построение логической функции по ее таблице истинности:***

Попробуем решить обратную задачу. Пусть дана таблица истинности для некоторой логической функции ***Z(X,Y)***:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **X** | **Y** | **Z** |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Составить логическую функцию для заданной таблицы истинности.

***Правила построения логической функции по ее таблице истинности:***

1. Выделитьвтаблицеистинноститестроки,вкоторыхзначениефункцииравно**1**.
2. Выписатьискомуюформулуввидедизъюнкциинесколькихлогическихэлементов.Числоэтихэлементовравночислувыделенныхстрок.
3. Каждыйлогическийэлементвэтойдизъюнкциизаписатьввидеконъюнкцииаргументовфункции.
4. Еслизначениекакого-либоаргументафункциивсоответствующейстрокетаблицеравно***0***,тоэтотаргументвзятьсотрицанием.

Решение.

1. Впервойитретьейстрокахтаблицыистинностизначениефункцииравно***1***.
2. Так как строки две, получаем ***дизъюнкцию*** двух элементов:***()V().***
3. Каждыйлогическийэлементвэтойдизъюнкциизапишемввиде***конъюнкции***аргументовфункции***X***и***Y***:***(X&Y)V(X&Y)***.
4. Берем аргумент с отрицанием, если его значение в соответствующей строке таблицы равно *0* и получаем искомую функцию:  
   *Z (X, Y) =(¬ X & ¬Y) V (X & ¬Y)*.

Порядок выполнения логических операций

* 1. Инверсия (отрицание) 
  2. Конъюнкция( логическое умножение) ****в остальных случаях=0)
  3. а) Дизъюнкция (логическое сложение) **** в остальных случаях=1)

б)Неравнозначность (либо..либо)**** в остальных случаях=0)

4. а) Импликация (если…., то), , в остальных случаях=1)

б) Эквивалентность (тогда и только тогда) в остальных случаях=0)

## Основныезаконылогики

|  |  |
| --- | --- |
| Закон тождества | A=A |
| Вторая форма закона непротиворечия |  |
| Закон исключения третьего |  |
| Закон двойного отрицания |  |
| Вытекаетиз2закона |  |
| **Свойства констант** | |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| **Закон идемпотентности** | |
|  |  |
| **Закон коммутативности (переместительный закон)** | |
|  |  |
| **Законы ассоциативности (сочетательный закон)** | |
|  |  |
| **Закон дистрибутивности(распределительный закон)** | |
|  |  |
| **Законы поглощения** | |
|  |  |
|  |  |
| **Законы деМоргана** | |
|  |  |
| **Правила замены операции импликации** | |
|  | |
| **Правила замены операции эквивалентности** | |
|  | |
| **Формула склеивания** | |
|  |  |
| **Правила замены операциинеравнозначности** | |
|  | |

**Примеры упрощения логических выражений**

**a)**

**b)**

**c)******

**d)**

**e)**



**Практическая часть**

Практическая работа № 2 «Составление таблиц истинности для формул»

***Тема:*** *Составление таблиц истинности для формул.*

**Задание к работе:**

1. Формализовать высказывание и по полученной формуле построить таблицу истинности:

1. Если я поеду в Москву и встречу там друзей, то мы интересно проведём время;
2. Неверно, что если дует ветер, то солнце светит только тогда, когда нет дождя;
3. Если будет солнечная погода, то ребята пойдут в лес, а если будет пасмурная, то ребята пойдут в кино;
4. Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда, когда нет ветра.
5. Если урок по информатике будет интересным, то никто из школьников – Миша, Вика, Света – не будет смотреть в окно;
6. Будет отменена прогулка или не будет, я останусь дома, если идёт дождь;

2. Построить таблицу истинности сложного высказывания и определить, является ли это высказывание тавтологией или противоречием:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

3. Определить, являются ли высказывания эквивалентными

1. ; ; .
2. ; .
3. ; ; .
4. ; .
5. ; .
6. **; .**

***Порядок выполнения работы:***

1.Изучитьинструкциюкпрактическойработе.

2.Выполнитьзадание.

3.Оформитьотчет.

***Содержание отчета:***

1.Тема.

2.Цель.

3.Материальноеобеспечение.

4.Практическоезадание.

***Вопросы для самоконтроля:***

1.Чтовключаютвсебялогическиевыражения?

2.ЧтосодержатТИикаковпорядокихпостроения?

3.Какиелогическиевыраженияназываютсяравносильными?

Практическая работа № 3 «Упрощение формул»

***Цель:*** *научиться упрощать логические выражения, применяя формулы.*

**Задание к работе:**

Упростить выражение:

|  |  |
| --- | --- |
| **1вариант** | **2вариант** |
| **1)** | **1)** |
| **2)** | **2)** |
| **3)** | **3)** |
| **4)** | **4)** |
| **5)** | **5)** |
| **6)** | **6)** |
| **7)** | **7)** |
| **8)** | **8)** |

***Порядок выполнения работы:***

1.Изучитьинструкциюкпрактическойработе.

2.Выполнитьзадание.

3.Оформитьотчет.

***Содержание отчета:***

1.Тема.

2.Цель.

3.Материальноеобеспечение.

4.Практическоезадание.

***Вопросы для самоконтроля:***

* + - 1. С какого операнда нужно начинать при упрощении логических выражений?
      2. Какими формулами часто пользуются при упрощении логических выражений?

Тема 3 Нормальные формы для формул алгебры высказываний

*Практическая работа № 4 «Приведение формул к совершенным нормальным формам»*

*Практическая работа № 5 «Упрощение формул логики до минимальной ДНФ.*

**Цель:**отработатьнавыкивприведенииформулксовершеннымнормальнымформам;научитьсяприменятьиразрабатыватьалгоритм,блок-схемыипрограммыреализующихпостроениесовершенныхнормальныхформ; научиться упрощать формулы до минимальной ДНФ.

**Материальное обеспечение:** практическая работа.

**Общие теоретические положения**

*Логика высказываний*

Высказываниемназываетсяповествовательноепредложение,окоторомможносказатьвданныймомент,чтооноистинноилиложно,нонетоидругоеодновременно.Истинностьилиложностьпредложенияестьистинноезначениевысказывания.Сопоставимкаждомувысказываниюпеременнуюравную1,еслионоистинноиравную0еслионоложно.ЕслиPиQ–некоторые высказывания, то можно образовать высказывания“PилиQ”,“PиQ”,“неP”, введя операции дизъюнкции(),конъюнкции(&)иотрицания.Действияэтихоперацийзадаютсятаблицамиистинности(таб.1-3),каждойстрокекоторыхвзаимнооднозначносоответствуютнаборзначенийсоставляющихвысказыванийисоответствующеезначениесоставноговысказывания.

Таблица1Таблица2Таблица3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | PQ |  | P | Q | P&Q |  | P |  |
| 0 | 0 | 0 |  | 0 | 0 | 0 |  | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |  | 0 | 1 | 0 |  | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |  | 1 | 0 | 0 |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  |  |  |

Операциидизъюнкции,конъюнкциииотрицаниячитаютсякак«или»,«и»и«не».

Приведем основные законы, определяющие эти операции:

* закон идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции

(1)

* закон коммутативности дизъюнкции и конъюнкции

 (2)

* закон ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции

(3)

* закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции

(4)

* закон двойного отрицания

(5)

* законы де Моргана

(6)

* законы склеивания

(7)

* законы поглощения

(8)

* законы Порецкого

(9)

* Законы, определяющие действия с константой

(10)

Всякоевысказывание,построенноеспомощьюопераций«и»,«или»,«не»,имеетнекотороеистинноезначение,зависящееотзначенийсоставляющихвысказываний.Любоевысказывание*f*можетбытьзадановвидетаблицыистинности.Еслизначениевысказываниязависитотnсоставляющих высказываний*x1,x2,x3,…xn*,тотаблицаистинностисодержит2*n*строк. Составляющие высказывания*xi*будем называть томарными высказываниями или просто переменными*xi*,рассматривая при этом сложное высказывание как функцию *f* от *n* переменных.

*Построение совершенных нормальны хформ.*

Исчислениевысказыванийможнопостроитьиспользуясоответствующиетаблицыистинности. Алгебра Буля простейшая в классе булевых алгебр;она является двухэлементной булевой алгеброй. Одним из элементов двухэлементной булевой алгебры является0,таккакбулеваалгебраявляетсярешеткойсдополнениями,поэтомувторымэлементомэтойалгебрыявляется1.

Каждое высказывание и соответствующую ему булевую функцию*f(x1,x2,…xn)* можно представить в виде дизъюнкции конституент,где

.

Пример1.Рассмотримпримервысказывания*f(x1,x2,x3),*заданноетаблицейистинности(таб.4)

Таблица4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *f(x1,x2,x3)* |  | *x1* | *x2* | *x3* | *f(x1,x2,x3)* |
| 0 | 0 | 0 | 0 |  | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |  | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |  | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |

Согласно предыдущему утверждению функция*f(x1,x2,x3)*может быть представлена в виде:

*f(x1,x2,x3)=.*

В дальнейшем представление булевой функции*f(x1,x2…xn)*в виде дизъюнкции конституент будем называть совершенной дизъюнктивной нормальной формой(СДНФ)функции*f(x1,x2…xn).*

Переменнуюилиееотрицаниебудемназыватьпервичнымтермом.Количествопервичныхтермов,которыеобразуютформу,называютсложностью*L(f)*этой формы.

СложностьСДНФфункцииизпримераравна12.ДляуменьшениясложностиэтойфункциииспользуютосновныетождестваалгебрыБуля(законы1-8).Согласносвойствуидемпотентностидизъюнкцииимеем:

*f(x1,x2,x3)=.*

Используясвойствакоммутативности,ассоциативностиидистрибутивности,получаем:

*f(x1,x2,x3)=*

Окончательно имеем

*f(x1,x2,x3)=*

В результате получаем сложностьL(f)функции*f(x1,x2,x3)*равную5.

Аналогичноможнокаждоевысказываниеисоответствующуюемубулевуфункцию*f(x1,x2,…xn)*представить в виде конъюнкции конституент,где

.

В дальнейшем представление булевой функции*f(x1,x2…xn)*ввидеконъюнкциидизъюнкцийбудемназыватьсовершеннойконъюнктивнойнормальнойформой(СКНФ)функции*f(x1,x2…xn).*

Дляпримера1функция*f(x1,x2,x3)*может быть представлена в виде:

*f(x1,x2,x3)=*

***Булевы функции двух переменных***

Любоесложноевысказываниеможнопредставитьввидевыражения,вкотороевходятпростыевысказывания(переменные)*xi*операциидизъюнкции,конъюнкции,отрицанияи,бытьможет,скобки.Рассмотрим,какимсвойствамдолжныудовлетворятьоперации,спомощьюкоторыхможновыражатьлюбоесложноевыражение.

Суперпозицией системы

называется любая функцияf,полученная:

а)изпереименованием переменных,;

б)подстановкой вместо некоторых переменных функциифункций,;

в)с помощью многократно применения пунктова)иб).

СистемаS называется полной в Pk, если любая функцияfPk представима в виде суперпозиции этой системы; системаSназывается базисом,если полнотаSтеряется при удалении хотя бы одной функции, гдеPk–k-значная логика.

Построим все булевы функции от двух переменных(таб.5)

Таблица5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| переменные | | Булевы функции | | | | | | | | | | | | | | | |
| **x1** | **x2** | **f0** | **f1** | **f2** | **f3** | **f4** | **f5** | **f6** | **f7** | **f8** | **f9** | **f10** | **f11** | **f12** | **f13** | **f14** | **f15** |
| *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* |
| *0* | *1* | *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* | *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* |
| *1* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *0* | *0* | *1* | *1* | *0* | *0* | *1* | *1* | *0* | *0* | *1* | *1* |
| *1* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *1* |

Индекс*i*функциональной переменной*fi,i=0,1,2,….,15,*равендесятичномуэквивалентномунаборузначенийэтойфункции,читаемойсверхувниз.Приведемэтибулевыфункции:

*f0(x1,x2)=0–константа0;*

*f1(x1,x2)=конъюнкция;*

*f2(x1,x2)= – левая коимпликация(читается«нееслиx1,тоx2);*

*f3(x1,x2)=;*

*f4(x1,x2)=– правая коимпликация;*

*f5(x1,x2)=*

*f6(x1,x2)= –сложениепомодулю2илифункциянеравнозначности,неэквивалентности;*

*f7(x1,x2)=-дизъюнкция;*

*f8(x1,x2)= – функция Вебба;*

*f9(x1,x2)=–функция эквивалентности,равнозначности;*

*f10(x1,x2)= – отрицание;*

*f11(x1,x2)=–правая импликация(читается«еслиx2,тоx1);*

*f12(x1,x2)= –отрицание;*

*f13(x1,x2)=левая импликация(читается«еслиx1,тоx2);*

*f14(x1,x2)=– функция Шеффера;*

*f15(x1,x2)=1–константа1.*

**Минимизация формул булевых функций в классе дизъюнктивных**

**нормальных форм**

***Определение.***ДНФназывается*минимальной,*еслионасодержитнаименьшееобщеечисловхожденийпеременныхсредивсехравносильныхейДНФ.

***Определение.*** *Импликантом* булевой функции*f*(*x*1,*x*2,...,*xn*)называетсяэлементарнаяконъюнкцияС,неравнаятождественно0,такаячто*C*V*f**f*.Отметим,чтолюбаяконъюнкциялюбойДНФвсилузаконаидемпотентности(равносильность5б)является импликантом этой функции.

***Определение.***Импликант*C*функции*f*называется*простымимпликантом*,еслипослеотбрасываниялюбойпеременнойиз*C*получаетсяэлементарнаяконъюнкция,неявляющаясяимпликантомфункции*f*.

**Карта Карно** — графический способ минимизации переключательных (булевых) функций, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями. Представляет собой операции попарного неполного склеивания и элементарного поглощения.

Карта Карно - это специального вида таблица, которая позволяет упростить процесс поиска минимальных форм и успешно применяется, когда число переменных не превосходит шести. **Карты Карно** для функций, зависящих от n переменных, представляет собой прямоугольник, разделенный на 2n клеток. Каждой клетке диаграммы ставится в соответствие двоичный n-мерный набор. Значения заданной функции f из [таблицы истинности](http://tablica-istinnosti.ru/) вносятся в нужные квадраты, однако если клетке соответствует 0, то обычно она остается пустой.

Для построения минимальной ДНФ производится процедура склеивания "1". Склеивающимся значениям "1" соответствуют соседние клетки, т.е. клетки отличающиеся лишь значением одной переменной (на графическом изображении разделенных вертикальной или горизонтальной линией с учетом соседства противоположных крайних клеток).

* Если необходимо получить минимальную ДНФ, то в Карте рассматриваем только те клетки, которые содержат единицы, если нужна КНФ, то рассматриваем те клетки, которые содержат нули.

Процесс склеивания "1" сводится к объединению в группы единичных клеток карты Карно, при этом необходимо выполнять следующие правила;

1. Количество клеток, входящих в одну группу, должно выражаться числом кратным 2, т.е. 2m где m=0,1,2,..

2.Каждая клетка, входящая в группу из 2m клеток, должна иметь m соседних в группе.

3.Каждая клетка должна входить хотя бы в одну группу.

4.В каждую группу должно входить максимальное число клеток, т.е. ни одна группа не должна содержаться в другой группе.

5.Число групп должно быть минимальным.

Считывание функции f по группе склеивания производится следующим образом: переменные, которые сохраняют одинаковые значения в клетках группы склеивания, входят в конъюнкцию, причем значениям 1 соответствуют сами переменные, а значениям 0 их отрицания.

**Метод Квайна** основывается на применении двух основных соотношений.

* 1. Соотношение склеивания

А*х* V А = А*х* V А V А, где А - любое элементарное произведение.

2. Соотношение поглощения

А~*х* V А = А,   ~*х* E {*х*; }.

Справедливость обоих соотношений легко проверяется. Суть метода заключается в последовательном выполнении всех возможных склеиваний и затем всех поглощений, что приводит к сокращенной ДНФ. Метод применим к совершенной ДНФ. Из соотношения поглощения следует, что произвольное элементарное произведение поглощается любой его частью.  
Для доказательства достаточно показать, что произвольная простая импликанта р = xi1xi2 ... xin может быть получена. В самом деле, применяя к р операцию развертывания (обратную операции склеивания):

A = A (*x* v ) = A*x* v A

**Пример.** Пусть имеется булева функция, заданная таблицей истинности. Её СДНФ имеет вид:

f = *x4 x3x4 x2x4 x2 x3x4 x1x2 x3x1 x2x3x4*

Для удобства изложения пометим каждую конституенту единицы из СДНФ функции f каким-либо десятичным номером (произвольно). Выполняем склеивания. Конституента 1 склеивается только с конституентой 2 (по переменной x3) и с конституентой 3 (по переменной х2), конституента 2 с конституентой 4 и т. д. В результате получаем:

1 - 2: *x4*

1 - 3: *x4*

2 - 4: *x3x4*

3 - 4: *x2x4*

4 - 6: *x2x3x4*

5 - 6: *x1 x2x3*

Заметим, что результатом склеивания является всегда элементарное произведение, представляющее собой общую часть склеиваемых конституент. Далее производим склеивания получаемых элементарных произведений.Склеиваются только те произведения, которые содержат одинаковые переменные. Имеет место два случая склеивания:

*x4x2x4= x4x2x4x4;*

*x4x3x4=x4x3x4x4;*

с появлением одного и того же элементарного произведения /x1x4. Дальнейшие склеивания невозможны. Произведя поглощения (из полученной ДНФ вычеркиваем все поглощаемые элементарные произведения), получим сокращенную ДНФ:

*x2x3x4x1 x2x3x4.*

Переходим ко второму этапу. Для получения минимальной ДНФ необходимо убрать из сокращенной ДНФ все лишние простые импликанты. Это делается с помощью специальной импликантной матрицы Квайна. Строки такой матрицы отмечаются простыми импликантами булевой функции, т. е. членами сокращенной ДНФ, а столбцы - конституентами единицы, т. е. членами СДНФ булевой функции.

**Пример**(продолжение). Импликантная матрица имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Простыеимпликанты | Конституенты единицы | | | | | |
| *x4* | *x3x4* | *x2 x4* | *x2 x3 x4* | *x1x2 x3* | *x1 x2 x3 x4* | |
| *x4.* | **X** | **X** | **X** | **X** |  |  | |
| *x2x3x4* |  |  |  | **X** |  | **X** | |
| *x1 x2x3* |  |  |  |  | **Х** | **Х** | |

Минимальные ДНФ строятся по импликантной матрице следующим образом:

1. ищутся столбцы импликантной матрицы, имеющие только один крестик. Соответствующие этим крестикам простые импликанты называются базисными и составляют так называемое ядро булевой функции. Ядро обязательно входит в минимальную ДНФ.
2. рассматриваются различные варианты выбора совокупности простых импликант, которые накроют крестиками остальные столбцы импликантной матрицы, и выбираются варианты с минимальным суммарным числом букв в такой совокупности импликант.

**Пример** (продолжение). Ядром нашей функции являются импликанты x1x2x3; /x1x4. Импликанта x2x3x4 - лишняя, так как ядро накрывает все столбцы импликантной матрицы. Поэтому функция имеет единственную тупиковую и минимальную ДНФ:

f = *x1 x2x3x4.*

Следует отметить, что число N крестиков в одной строке всегда является степенью 2. Более того, читатель может легко убедиться в том, что

N = 2n-k

где k - число букв, содержащихся в простой импликанте.

**Практическая часть**

Практическая работа № 4 «Приведение формул к совершенным нормальным формам»

***Цель:*** *отработать навыки в приведении формул к совершенным нормальным формам; научиться применять и разрабатывать алгоритм, блок-схемы и программы реализующих построение совершенных нормальных форм.*

***Задание к работе:***

1.Изучитьтеоретическийматериалпотемепрактическогозанятия.

2.Позаданнойтаблицеистинностипостроитьсовершеннуюдизъюнктивнуюнормальнуюформу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x1* | *x2* | *x3* | *f(x1,x2,x3)* |  | *x1* | *x2* | *x3* | *f(x1,x2,x3)* |
| 0 | 0 | 0 | 1 |  | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |  | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |  | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |

3.Позаданнойтаблицеистинностипостроитьсовершеннуюконъюнктивнуюнормальнуюформу.

4.Определитьсложностьформивыполнитьупрощениеих.Объяснитеполученныерезультаты.

5.Разработатьблок-схемуалгоритмаполученияСДНФиСКНФ.

6.Реализоватьнаязыкепрограммированияблок-схемуалгоритмаполученияСДНФиСКНФ(повыбору).

7.Выписатьвотчетходвыполненияработыивыводы.

***Порядок выполнения работы:***

1.Изучитьинструкциюкпрактическойработе.

2.Выполнитьзадание.

3.Оформитьотчет.

***Содержание отчета:***

1.Тема.

2.Цель.

3.Материальноеобеспечение.

4.Практическоезадание.

***Вопросы для самоконтроля:***

1.Чтоназываетсявысказыванием?

2.ДокажитеспомощьютаблицистинностиосновныезаконыалгебрыБуля.

3.Чтоназываетсяатомарнымвысказыванием?

4.Чтоназываютсовершеннойдизъюнктивнойнормальнойформой?Каквыполняетсяеепостроение?

5.Чтоназываютсовершеннойконъюнктивнойнормальнойформой?Каквыполняетсяеепостроение?

6.Чтоявляетсясложностьюформыикакееопределять.

Практическая работа № 5

***Цель:*** *научиться упрощать формулы до минимальной ДНФ.*

***Задание к работе:***

Для данной формулы булевой функции

а)найти ДНФ,КНФ,СДНФ,СКНФ методом равносильных преобразований;

б)найтиСДНФ,СКНФтабличнымспособом(сравнитьсСДНФ,СКНФ,полученнымивпункте“а”);

в)указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

**Варианты заданий**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Функция |  | Функция |
| 1. | (B)C | 5. | (AC ) |
| 2. | (A) ) | 6. | ( C) () |
| 3. | (AC) | 7. | (B ) |
| 4. | B (A) | 8. | (AB) C |

***Порядок выполнения работы:***

1.Изучитьинструкциюкпрактическойработе.

2.Выполнитьзадание.

3.Оформитьотчет.

***Содержание отчета:***

1.Тема.

2.Цель.

3.Материальноеобеспечение.

4.Практическоезадание.

***Вопросы для самоконтроля:***

## 1. Что означает сокращение СДНФ,СКНФ?

2. Как вычислить ДНФ,КНФ?

Тема 4 Множества, отношения, функции

## *Практическая работа № 6«Операции над множествами. Классификация множеств. Мощность множеств»*

## *Практическая работа № 7 «Круги Эйлера решение задач»*

**Цель:** научить выполнять операции над множествами и вычислять их мощность; научиться применять круги Эйлера в решении задач.

**Материальное обеспечение:** практическая работа.

**Общие теоретические положения**

Основные понятия множества

***Определение1.****Множеством*называетсясовокупностькаких-либообъектов,обладающимобщимдлявсеххарактеристическимсвойством.Этоопределениенельзясчитатьстрогим,таккакпонятиемножестваявляетсяисходнымпонятиемматематикиинеможетбытьопределеночерездругиематематическиеобъекты.ОдинизоснователейтеориимножествГ.Канторопределялмножествотак:"Множествоестьмногое,мыслимоекакцелое".

*Пример1*.

Следующиесовокупностиобъектовявляютсямножествами:множестводеревьеввлесу,множествоцелыхчисел,множествокорнейуравнения*exsinx*=0.5.

Всякое множество состоит из *элементов*. Множестваобозначаютбольшимибуквами,например*А,В,С*,аэлементы–маленькимибуквами,например,*а,b,c.*

Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

*А*={*a*1,*a*2,*a*3}–множество, состоящее из трех элементов;

*А*={*a*1,*a*2,…}–множество, состоящее из бесконечного числа элементов.

Множествоможетсостоятьизэлементов,которыесамиявляютсямножествами.Нужноразличатьэлемент*a*имножество,состоящееизединственногоэлемента*a*.

*Пример2*.

Множество*А*={1,2}состоитиздвухэлементов1,2;номножество{*А*}состоитизодногоэлемента*А*.

Еслиэлемент*a*принадлежитмножеству*А*,этозаписываетсяследующимобразом:

*a*∈*А*.Если элемент *a* не принадлежит множеству*А*,тозаписываюттак:*a*∉*А*.

*Пример3*.

Пусть*А*1–множествопростыхчисел,*А*2–множествоцелыхчисел,*a*=4.Тогда

*a*∈*А*2,*a*∉*А*1.

Есливсеэлементымножества*А*являютсяэлементамимножества*В*инаоборот,т.е.множества*А*и*В*совпадают,тоговорят,что*А*=*В.*

Есликаждыйэлементмножества*А*являетсяэлементоммножества*В,*говорят,чтомножество*А*является*подмножеством*множества*В*,изаписывают*А*⊆*В*или*В*⊇*А.*Отметим,чтопоопределениюсамомножество*А*являетсясвоимподмножеством,т.е.*А*⊆*А*.

Если *А*⊆*В*и*В*⊆*А*,то по ранее введенному определению *А*=*В.*

Если *А*⊆*В*и*А*≠*В*,то *А* сть *собственное подмножество В,А*⊂*В*. Если *А* не является собственным подмножеством *В,* то записывают *А*⊄*В*.

*Пример4*.

Пусть*А*–множествочетныхчисел,*В*–множествоцелыхчисел,*С*–множествонечетныхчисел.Тогда

*А*⊂*В*,*С*⊂*В*,*А*⊄*С*,*В*⊄*А*.

Не надо смешивать *отношение принадлежности* (∈)и *отношение включения*(⊆).

*Пример5*.

Пусть*А*={2}–множество,состоящееизодногоэлемента,*В*={{2},{4}}–множество,состоящееиздвухэлементов,каждоеизкоторыхявляетсяодноэлементныммножеством. Тогда имеют место следующие соотношения:

2∈{2};

{2}⊂{{2},{4}};

2∉{{2},{4}}.

Множество,несодержащеениодногоэлемента,называется*пустыммножеством*иобозначается∅.Принятосчитать,чтопустоемножествоявляетсяподмножествомлюбогомножества,∅⊆*А*,где*А*–любоемножество.Такимобразом,всякоемножествосодержитвкачествесвоихподмножествпустоемножествоисамосебя.

*Пример6*.

Множествокорнейуравнения*sinx*=2являетсяпустым.

Множествовсехподмножествданногомножества*А*называетсямножеством-степеньюиобозначается*P*(*A*).Множество*P*(*A*)состоитиз2*n*элементов(доказатьсамостоятельно).

*Пример7*.

Пустьмножество*А*={1,2}состоитиздвухэлементов1,2.Тогдамножество*P*(*A*)включаетвсебяпустоемножество∅,два одноэлементных множества{1}и{2}и само множество*А*={1,2},т.е.

*P*(*A*)={∅,{1},{2},{1,2}}.

Мы видим, что множество *P*(*A*)состоит из четырех элементов(4=22).

Существуют следующие способы задания множеств.

* 1. Например:

*A*={1,3,5,7,9}–конечное множество;

*B*={1,2,…,*n*,…}–бесконечное множество.

* 1. Для этого способа пользуются следующим форматом записи:*A*={*a*⎜указание свойства элементов}. Здесь *a* является элементом множества *A*,*a*∈*А*.Например:

*A*={*a*⎜*a*–простоечисло}–множество простых чисел;

*B*={*b*⎜*b*2–1=0,*b*–действительноечисло}–множество,состоящееиздвухэлементов,*B*={–1,1};

*Z=*{*x*⎜**=1}–множество,состоящееизодногочисла,*x*=0.

**Операции над множествами**

Рассмотрим основные операции над множествами.

*Объединение множеств* *А*и*В* называется множество *А*∪*В*,всеэлементыкоторогоявляютсяэлементамихотябыодногоизмножеств*А*или*В*:

*А*∪*В*={*x*⎜*x*∈*А*или*x*∈*В*}.

Из определения следует, что*А*⊆*А*∪*В*и*В*⊆*А*∪*В.*

Аналогично определяется объединение нескольких множеств.

*Пример8*.

а)Пусть *А*={4,5,6},*В*={2,4,6}.

Тогда *А*∪*В*={2,4,5,6}.

б)Пусть*А*–множествочисел,которыеделятсяна2,а*В*–множествочисел,которыеделятсяна3:

*А*={2,4,6,…},*В*={3,6,9,…}.

Тогда *А*∪*В*множествочисел,которыеделятсяна2илина3:

*А*∪*В*={2,3,4,6,8,9,10,…}.

*Пересечением*множеств*А*и*В*называетсямножество*А*⋂*В*,всеэлементыкоторогоявляютсяэлементамиобоихмножеств*А*и*В*:

*А*⋂*В*={*x*⎜*x*∈*А*и*x*∈*В*}.

Из определения следует,что*А*⋂*В*⊆*А*,*А*⋂*В*⊆*В*и*А*⋂*В*⊆*А*∪*В.*

Аналогично определяется пересечение нескольких множеств.

*Пример 9*.

Рассмотримданныеизпримера1.8.

а)Пусть *А*={4,5,6},*В*={2,4,6}.

Тогда *А*⋂*В*={4,6}.

б) Пусть*А*–множествочисел,которыеделятсяна2,а*В*–множествочисел,которыеделятсяна3:

*А*={2,4,6,…},*В*={3,6,9,…}.

Тогда*А*⋂*В*множествочисел,которыеделятсяина2ина3:

*А*∪*В*={6,12,18,…}.

Можетоказаться,чтомножестванеимеютниодногообщегоэлемента.Тогдаговорят,чтомножестванепересекаютсяиличтоихпересечение–пустоемножество.

*Пример10*.

Пусть*А*={1,2},*В*={2,3},*C*={3,4}.

Тогда*А*⋂*В*⋂*C*=∅.

*Относительнымдополнением*множества*В*домножества*А*называетсямножество*А*\*В*,всеэлементыкоторогоявляютсяэлементамимножества*А*,нонеявляютсяэлементамимножества*В*:

*А*\*В*={*x*⎜*x*∈*А*и*x*∉*В*}.

*Пример11*.

Рассмотримданныеизпримера1.8.

а)*А*={4,5,6},*В*={2,4,6}.

*А*\*В*={4,5},*В*\*А*={2}.

б)*А*={2,4,6,…},*В*={3,6,9,…}.

Тогда*А*\*В*–множествочисел,которыеделятсяна2,нонеделятсяна3,а*В*\*А*–множествочисел,которыеделятсяна3,нонеделятсяна2:

*А*\*В*={2,4,8,10,14,…}.

*В*\*А*={3,9,15,21,27,…}.

*Симметрической разностью* множеств*А*и*В*называетсямножество*А*+*В*:

*А*+*В*=(*А*\*В*)∪(*В*\*А*).

*Пример12*.

Рассмотримданныеизпримера1.11.

а)*А*={4,5,6},*В*={2,4,6}.

*А*\*В*={4,5},*В*\*А*={2},*А*+*В*={2,4,5}.

б)*А*={2,4,6,…},*В*={3,6,9,…},*А*\*В*={2,4,8,10,14,…}.

*В*\*А*={3,9,15,21,27,…},*А*+*В*={2,3,4,8,9,…}.

*Универсальныммножеством*называетсятакоемножество*U*,чтовсерассматриваемыевданнойзадачемножестваявляютсяегоподмножествами.

*Абсолютным дополнением* множества *А* называется множествовсехтакихэлементов*x*∈*U*,которыенепринадлежатмножеству*А*:=*U*\*A.*

*Пример1.13*.

Пусть*А–*множество положительных четныхчисел.

Тогда*U*–множество всех натуральных чисел и–множество положительных нечетныхчисел.

**Счетные множества**

***Определение1.***Множество,эквивалентноемножествунатуральныхчисел*N*={1,2,3,…,*n*…},называется *счетным*.

Можно сказатьтакже,чтомножествосчетно,еслиегоэлементыможноперенумеровать.

*Пример*.

Следующие множества являются счетными.:

1.*A*1={–1,–2,…,–*n*,…};

2.*A*2={2,22,…,2*n*,…};

3.*A*3={2,4,…,2*n*,…};

4.*A*4={…,–*n*,…,–1,0,1,…,*n*,…};

Чтобыустановитьсчетностьнекоторогомножества,достаточноуказатьвзаимнооднозначноесоответствиемеждуэлементамиданногомножестваимножестванатуральныхчисел.Дляпримера1.19взаимнооднозначноесоответствиеустанавливаетсяпоследующимправилам:длямножества*A*1:–*n*↔*n*;длямножества*A*2:2*n*↔*n*;длямножества*A*3:2*n*↔*n*;счетностьмножества*A*4установленавпримере1.19;

Установитьсчетностьмножествможнотакже,используяследующие*теоремыосчетныхмножествах*(приводятсябездоказательств).

***Теорема1.***Всякоебесконечноеподмножествосчетногомножествасчетно.

*Пример*.

Множество*A*={3,6,…,3*n*,…}счетно,т.к.*A*–бесконечноеподмножествомножестванатуральныхчисел,*A*⊂*N*.

***Теорема2.***Объединениеконечнойилисчетнойсовокупностисчетныхмножествсчетно.

*Пример*.

Множество*A*={0,1,…,*n*,…}неотрицательныхцелыхчиселсчетно,множество*B*={0,–1,…,–*n*,…}неположительныхцелыхчиселтожесчетно,поэтомумножествовсехцелыхчисел*С*=*А*∪*B*={…,–*n*,…–2,–1,0,1,2,…,*n*,…}тожесчетно.

***Теорема3.***Множествовсехрациональныхчисел,т.е.чиселвида,где*p*и*q*целыечисла,счетно.

***Теорема4.***Если*А*={*a*1,*a*2,…}и*B*={*b*1,*b*2,…}–счетные множества, то множество всех пар*С*={(*ak*,*bn*),*k*=1,2,…;*n*=1,2,…}счетно.

*Пример*.

Геометрический смысл пары(*ak*,*bn*)–точка на плоскости с рациональными координатами(*ak*,*bn*).Поэтомуможноутверждать,чтомножествовсехточекплоскостисрациональнымикоординатамисчетно.

***Теорема5.***Множествовсехмногочленов*P*(*x*)=*a*0+*a*1*x*+*a*2*x2+…+anxn* любых степеней с рациональными коэффициентами*a*0,*a*1,*a*2,*…an*счетно.

***Теорема6.***Множествовсехкорнеймногочленовлюбыхстепенейсрациональнымикоэффициентамисчетно.

**Множества мощности континуума**

Существуютбесконечныемножества,элементыкоторыхнельзяперенумеровать.Такиемножестваназываются*несчетными*.

***Теорема Кантора.***Множествовсехточекотрезка[0,1]несчетно.

Доказательство.

Пустьмножествоточекотрезка[0,1]счетно.Значит,этиточкиможноперенумеровать,т.е.расположитьввидепоследовательности*x*1,*x*2*…xn*,….



Рис.1.7

Разобьем отрезок[0,1]на три равные части. Где бы ни находилась точка*x*1,она не может принадлежать всем отрезкам,,.Поэтому среди них есть отрезок Δ1,несодержащийточку*x*1(рис.1.7).Возьмем этот отрезокΔ1иразделимегонатриравныечасти.СрединихвсегдаестьотрезокΔ2,несодержащийточку*x*2.Разделимэтототрезокнатриравныечастиит.д.ПолучимпоследовательностьотрезковΔ1⊃Δ2⊃Δ3⊃…⊃Δ*n*⊃….ВсилуаксиомыКанторасходитсякнекоторойточке*x*при*n*→∞.Попостроениюэтаточка*x*принадлежиткаждомуотрезкуΔ1,Δ2,Δ3,…,Δ*n*,…,т.е.онанеможетсовпадатьнисоднойизточек*x*1,*x*2,*…xn*,…,т.е.последовательность*x*1,*x*2*…xn*,…неисчерпываетвсехточекотрезка[0,1],чтопротиворечитпервоначальномупредположению.Теоремадоказана.

Множество,эквивалентноемножествувсехточекотрезка[0,1]называется*множествоммощностиконтинуума*.

Таккакмножестваточекинтервалов,отрезковивсейпрямойэквивалентнымеждусобой,товсеониимеютмощностьконтинуума.

Чтобыдоказать,чтоданноемножествоимеетмощностьконтинуума,достаточноуказатьвзаимнооднозначноесоответствиемеждуданныммножествомимножествомточекотрезка,интервалаиливсейпрямой.

*Пример*.

Изрисунок1следует,чтомножествоточекпараболы*y*=*x*2эквивалентномножествуточекпрямой–∞<*x*<∞и, следовательно, имеет мощность континуума.

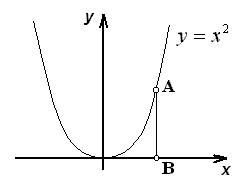


Рисунок1

Установитьмощностьконтинуумаможнотакже,используяследующие*теоремыомножествахмощностиконтинуума*(приводятсябездоказательств).

***Теорема1.***Множествовсехподмножествсчетногомножествасчетно.

***Теорема2.***Множествоиррациональныхчиселимеетмощностьконтинуума.

***Теорема3.***Множествовсехточек*n-*мерногопространстваприлюбом*n*имеетмощностьконтинуума.

***Теорема4.***Множествовсехкомплексныхчиселимеетмощностьконтинуума.

***Теорема5.***Множествовсехнепрерывныхфункций,определенныхнаотрезке[*a*,*b*]имеетмощностьконтинуума.

Итак,мощностибесконечныхмножествмогутразличаться.Мощностьконтинуумабольше,чеммощностьсчетногомножества.Ответнавопрос,существуютлимножестваболеевысокоймощности,чеммощностьконтинуума,даетследующаятеорема(приводитсябездоказательства).

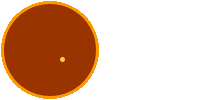
***Теоремаомножествахвысшеймощности.***Множествовсехподмножествданногомножестваимеетболеевысокуюмощность,чемданноемножество.

Изэтойтеоремыследует,чтомножествсмаксимальнобольшоймощностьюнесуществует.

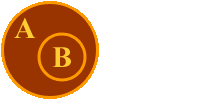
Эйлеровыкруги(кругиЭйлера)—принятыйвлогикеспособмоделирования,наглядногоизображенияотношениймеждуобъемамипонятийспомощьюкругов,предложенныйзнаменитымматематикомЛ.Эйлером(1707–1783).

Обозначениеотношениймеждуобъемамипонятийпосредствомкруговбылопримененоещепредставителемафинскойнеоплатоновскойшколы—Филопоном(VIв.),написавшимкомментариина«ПервуюАналитику»Аристотеля.

Условнопринято,чтокругнаглядноизображаетобъемодногокакого-нибудьпонятия.Объемжепонятияотображаетсовокупностьпредметовтогоилииногоклассапредметов.Поэтомукаждыйпредметклассапредметовможноизобразитьпосредствомточки,помещеннойвнутрикруга,какэтопоказанонарисунке:

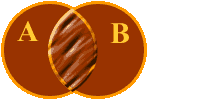


Группапредметов,составляющаявидданногоклассапредметов,изображаетсяввидеменьшегокруга,нарисованноговнутрибольшегокруга,какэтосделанонарисунке:



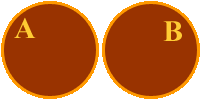
Такоеименноотношениесуществуетмеждуобъемамипонятий«небесноетело»(А)и«комета»(B).Объемупонятия«небесноетело»соответствуетбольшийкруг,аобъемупонятия«комета» – меньшийкруг.Этоозначает,чтовсекометыявляютсянебеснымителами.Весьобъемпонятия«комета»входитвобъемпонятия«небесноетело».

Втехслучаях,когдаобъемыдвухпонятийсовпадаюттолькочастично,отношениемеждуобъемамитакихпонятийизображаетсяпосредствомдвухперекрещивающихсякругов,какэтопоказанонарисунке:



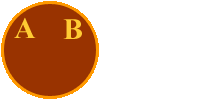
Такоеименноотношениесуществуетмеждуобъемомпонятий«учащийся»и«комсомолец».Некоторые(ноневсе)учащиесяявляютсякомсомольцами;некоторые(ноневсе)комсомольцыявляютсяучащимися.НезаштрихованнаячастькругаАотображаеттучастьобъемапонятия«учащийся»,котораянесовпадаетсобъемомпонятия«комсомолец»;незаштрихованнаячастькругаBотображаеттучастьобъемапонятия«комсомолец»,котораянесовпадаетсобъемомпонятия«учащийся».3аштрихованиаячасть,являющаясяобщейдляобоихкругов,обозначаетучащихся,являющихсякомсомольцами,икомсомольцев,являющихсяучащимися.

Когдажениодинпредмет,отображенныйвобъемепонятияA,неможетодновременноотображатьсявобъемепонятияB,товтакомслучаеотношениемеждуобъемамипонятийизображаетсяпосредствомдвухкругов,нарисованныходинвнедругого.Ниоднаточка,лежащаянаповерхностиодногокруга,неможетоказатьсянаповерхностидругогокруга.



Такоеименноотношениесуществует,например,междупонятиями«тупоугольныйтреугольник»и«остроугольныйтреугольник».Вобъемепонятия«тупоугольныйтреугольник»неотображаетсяниодиностроугольныйтреугольник,авобъемепонятия«остроугольныйтреугольник»неотображаетсяниодинтупоугольныйтреугольник.

Отношениямеждуравнозначащимипонятиями,объемыкоторыхсовпадают,отображаютсянагляднопосредствомодногокруга,наповерхностикоторогонаписаныдвебуквы,обозначающиедвапонятия,имеющиеодинитотжеобъем:



Такоеотношениесуществует,например,междупонятиями«родоначальниканглийскогоматериализма»и«автор„НовогоОрганона“».Объемыэтихпонятийодинаковы,внихотобразилосьодноитожеисторическоелицо–английскийфилософФ.Бэкон.

Нередкобываетитак:одномупонятию(родовому)подчиняетсясразунескольковидовыхпонятий,которыевтакомслучаеназываютсясоподчиненными.Отношениемеждутакимипонятиямиизображаетсянагляднопосредствомодногобольшогокругаинесколькихкруговменьшегоразмера,которыенарисованынаповерхностибольшегокруга:



Такоеименноотношениесуществуетмеждупонятиями«скрипка»,«флейта»,«пианино»,«рояль»,«барабан».Этипонятиявравноймереподчиненыодномуобщемуродовомупонятию«музыкальныеинструменты».

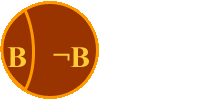
Круги,изображающиесоподчиненныепонятия,недолжныкасатьсядругдругаиперекрещиваться,таккакобъемысоподчиненныхпонятийнесовместимы;всодержаниисоподчиненныхпонятийимеются,нарядусобщими,различающиепризнаки.Этасхемаотображаетобщее,чтохарактернодляотношениялюбыхсоподчиненныхпонятий,взятыхизразличныхобластейзнания.Этоприменимокпонятиям:«дом»,«сарай»,«ангар»,«театр»,подчиненныхпонятию«постройка»;кпонятиям:«муха»,«комар»,«бабочка»,«жук»,«пчела»,подчиненныхпонятию«насекомое»ит.д.

Втехслучаях,когдамеждупонятиямиимеетсяотношениепротивоположности,отношениемеждуобъемамитакихпонятийотображаетсяпосредствомодногокруга,обозначающегообщеедляобоихпротивоположныхпонятийродовоепонятие,аотношениемеждупротивоположнымипонятиямиобозначаетсятак:А–родовоепонятие,BиC–противоположныепонятия.Противоположныепонятияисключаютдругдруга,новходятводинитотжерод,чтоможновыразитьтакойсхемой:



Приэтомвидно,чтомеждупротивоположнымипонятиямивозможнотретье,среднее,таккаконинеисчерпываютполностьюобъемародовогопонятия.Такоеименноотношениесуществуетмеждупонятиями«легкий»и«тяжелый».Ониисключаютдругдруга.Нельзяободномитомжепредмете,взятомводноитожевремяиводномитомжеотношении,сказать,чтоонилегкий,итяжелый.Номеждуданнымипонятиямиестьсреднее,третье:предметыбываютнетольколегкогоитяжелоговеса,нотакжеисреднеговеса.

Когдажемеждупонятиямисуществуетпротиворечащееотношение,тогдаотношениемеждуобъемамипонятийизображаетсяиначе:кругделитсянадвечаститак:А–родовоепонятие,Bине-B(обозначаетсякак¬B)–противоречащиепонятия.Противоречащиепонятия,исключаютдругдругаивходятводинитотжерод,чтоможновыразитьтакойсхемой:



Приэтомвидно,чтомеждупротиворечащимипонятиямитретье,среднее,невозможно,таккакониполностьюисчерпываютобъемродовогопонятия.Такоеотношениесуществует,например,междупонятиями«белый»и«небелый».Ониисключаютдругдруга.Нельзяободномитомжепредмете,взятомводноитожевремяиводномитомжеотношении,сказать,чтоонибелыйинебелый.

ПосредствомЭйлеровыхкруговизображаютсятакжеотношениямеждуобъемамисубъектаипредикатавсуждениях.Так,вобщеутвердительномсуждении,выражающемопределениекакого-либопонятия,объемысубъектаипредиката,какизвестно,равны.Нагляднотакоеотношениемеждуобъемамисубъектаипредикатаизображаетсяпосредствомодногокруга,подобноизображениюотношениймеждуобъемамиравнозначащихпонятий.Разницатольковтом,чтовданномслучаевсегданаповерхностикруганадписываютсядвеопределенныебуквы:S(субъект)иP(предикат),какэтопоказанонарисунке:



Иначевыглядитсхемаотношениямеждуобъемамисубъектаипредикатавобщеутвердительномсуждении,неявляющемсяопределениемпонятия.Втакомсужденииобъемпредикатабольшеобъемасубъекта,объемсубъектацеликомвходитвобъемпредиката.Поэтомуотношениемеждунимиизображаетсяпосредствомбольшогоималогокругов,какпоказанонарисунке:



**Решение задач, применяя круги Эйлера.**

Рассмотрим несколько задач, которые могут быть решены с применением кругов Эйлера на уроках математики или информатики.

Задачи

1.Вклассе25учащихся.Изних5человекнеумеютигратьнившашки,нившахматы.18учащихсяумеютигратьвшашки,20–вшахматы.Сколькоучащихсяклассаиграютившашки,ившахматы?

2.Каждыйиз35пятиклассниковявляетсячитателем,покрайнеймере,однойиздвухбиблиотек:школьнойирайонной.Изних25учащихсяберуткнигившкольнойбиблиотеке,20–врайонной.Сколькоизпятиклассников:

а)не являются читателями школьной библиотеки;

б)не являются читателями районной библиотеки;

в)являются читателями только школьной библиотеки;

г)являются читателями только районной библиотеки;

д)являются читателями обеих библиотек?

3.Каждыйучениквклассеизучаетлибоанглийский,либофранцузскийязык,либообаэтихязыка. Английскийязыкизучают25человек,французский–27человек,атотидругой–18человек.Скольковсегоучениковвклассе?

4.Налистебумагиначертиликругплощадью78см2иквад­ратплощадью55см2.Площадьпересечениякругаиквадратаравна30см2.Незанятаякругомиквадратомчастьлистаимеетплощадь150см2.Найдитеплощадьлиста.

5.Вдетскомсаду52ребенка.Каждыйизнихлюбитлибопирожное,либомороженое,либоито,идругое.Половинадетейлюбитпирожное,а20человек–пирожноеимороженое.Сколькодетейлюбитмороженое?

6.Вученическойпроизводственнойбригаде86старшеклассников.8изнихнеумеютработатьнинатракторе,нинакомбайне.54ученикахорошоовладелитрактором,62–комбайном.Сколькочеловекизэтойбригадымогутработатьинатракторе,инакомбайне?

7.Вклассе36учеников.Многиеизнихпосещаюткружки:физический(14человек),математический(18человек),химический(10человек).Крометого,известно,что2человекапосещаютвсетрикружка;изтех,ктопосещаетдвакружка,8человекзанимаютсявматематическомифизическомкружках,5–вматематическомихимическом,3–вфизическомихимическом.Сколькочеловекнепосещаютникакихкружков?

8.100шестиклассниковнашейшколыучаствоваливопросе,входекотороговыяснялось,какиекомпьютерныеигрыимнравятсябольше:симуляторы,квестыилистратегии.Врезультате20опрошенныхназвалисимуляторы,28–квесты,12–стратегии.Выяснилось,что13школьниковотдаютодинаковоепредпочтениесимуляторамиквестам,6учеников–симуляторамистратегиям,4ученика–квестамистратегиям,а9ребятсовершенноравнодушныкназваннымкомпьютернымиграм.Некоторыеизшкольниковответили,чтоодинаковоувлекаютсяисимуляторами,иквестами,истратегиями.Сколькотакихребят?

**Ответы**

1.А–шахматы25-5=20–чел.умеютиграть

В–шашки20+18-20=18–челиграютившашки,ившахматы

2.Ш–множествопосетителейшкольнойбиблиотеки

Р–множествопосетителейрайоннойбиблиотеки

25+20-35=10

а)10;

б)15;

в)15;

г)10;

д)10.

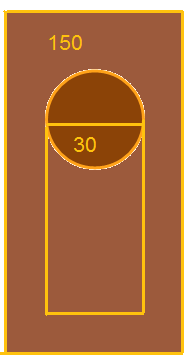
3.А–английский,Ф–французский

25-18=7–толькоанглийский

27-18=9–толькофранцузский

7+18+9=34–чел.вклассе

4.253.Sкр=78;Sкв=55;Sсумм=150;Sлиста=78+55-30+150=253



5.П–пирожное,М–мороженое

52-26-20=6–детейлюбятпирожное

6.Т–трактор,К–комбайн

54+62-(86-8)=38–умеютработатьинатрактореинакомбайне.

7.*Способ1*.Выясним,сколькоребятпосещаюттолькоматематическийкружок:18-8-5-2=3;толькофизический:14-8-3-2=1;толькохимический:10-5-3-2=0.Такимобразом,трикружкапосещают2ученика;двакружка–16учеников(8+3+5);одинкружок–4ученика(3+1+0).Всегопосещаюткружки2+16+4=22ученика.Следовательно,кружкинепосещают36–22=14ученика.

*Способ2*.Представиммножестваучащихся,посещаю­щихматематический,физическийихимическийкружки,ввидекругов,вырезанныхизплотнойбумаги.Будемсчитать,чтоплощадькаждогоизэтихкруговравначислуучащихся,посещающихсоответствующийкружок.Наложимкругидругнадругатак,чтобыбылопо­нятно,чтоестьучащиеся,посещающиеодин,дваилитрикружка.Вычислимплощадьполучившейсяплоскойфигуры:14+18+10–(8+5+3)–2–2=22–этоиестьчислоучеников,посещающихкружки.Следовательно,кружкинепосещают36–22=14учеников.

8.ПустьX– искомоечислоучеников,увлекающихсявсемивидамикомпьютерныхигр.Тогда:20+28+12+13+6+4+9+Х=100,Х=6.

**Практическая часть**

## Практическая работа № 6«Операции над множествами. Классификация множеств. Мощность множеств»

## *Цель: научить выполнять операции над множествами и вычислять их мощность.*

***Задание кработе:***

**Вариант№1**

1.Фирмаимеет100предприятий,причемкаждоепредприятиевыпускаетхотябыоднупродукциювидаА,В,С.Продукциювсехтрехвидоввыпускают10предприятий,продукциюАиВ–18предприятий,продукциюАиС–15предприятий,продукциюВиС–21предприятие.Числопредприятий,выпускающихпродукциюАравночислупредприятий,выпускающихпродукциюВиравночислупредприятий,выпускающихпродукциюС.Найтичисловсехпредприятий.

2.Упростить:∪∪.

3.Являетсялимножество*А*={1,2,3}подмножествоммножества*В*={{1},{2,3}}?

4.Придуматьпримермножеств*А,В,С*,каждоеизкоторыхимеетмощностьконтинуума,так,чтобывыполнялосьравенство:*А*∪*В*=*С*.

5.Эквивалентнылимножества*A*={*x*:*x*2–8*x*+15=0}и*B*={2,3}?

**Вариант№2**

1.Вгруппеспортсменов30человек.Изних20занимаютсяплаванием,18–легкойатлетикойи10–лыжами.Плаваниемилегкойатлетикойзанимаются11человек,плаваниемилыжами–8,легкойатлетикойилыжами–6человек.Сколькоспортсменовзанимаютсявсемитремявидамиспорта?

2.Упростить:*A*(*A*∪*B*).

3.Вкакомслучае*А**А*⋂*В*?

4.Придуматьпримермножеств*А,В,С*,каждоеизкоторыхимеетмощностьконтинуума,так,чтобывыполнялосьравенство:*А*∪*В*=*С*.

5.Какоеизмножеств*A*={1,4,9,16,25,…}и*B*={1,1/2,1/4,1/6,1/8,…}имеетбольшуюмощность?

**Вариант№3**

1.Встуденческойгруппе20человек.Изних10имеютоценку“отлично”поанглийскомуязыку,8-поматематике,7-пофизике,4-поанглийскомуязыкуипоматематике,5-поанглийскомуязыкуипофизике,4-поматематикеипофизике,3-поанглийскомуязыку,поматематикеипофизике.Сколькостудентовгруппенеимеютотличныхоценок?

2.Упростить:(*A*\*B*)∪(*A*\*B*).

3.Найтивсеподмножествамножества*A*={1,2,3,4).

4. Придуматьпримермножеств*А,В,С*,каждоеизкоторыхимеетмощностьконтинуума,так,чтобывыполнялосьравенство:*АВ*=*С*.

5.Доказать,чтомножестваточекконтуроввсехтреугольниковэквивалентны.

**Вариант№4**

1.Вклассе20человек.Наэкзаменахпоистории,математикеилитературе10учениковнеполучилиниоднойпятерки,6учениковполучили5поистории,5–поматематикеи4–политературе;2-поисториииматематике,2-поисторииилитературе,1-поматематикеилитературе.Сколькоучениковполучили5повсемпредметам?

2.Упростить:(*A*⋂*B*)∪(*A*⋂*B*).

3.Являетсялимножество*А*={1,2,3}подмножествоммножества*В*={{1},{2,3}}?

4.Придуматьпримермножеств*А,В,С*,каждоеизкоторыхимеетмощностьконтинуума,так,чтобывыполнялосьравенство:*А*∪*В*=*С*.

5.Эквивалентнылимножества*A*={2*x*,0<*x*<∞}и*B*={2n,n=1,2,…}?

**Вариант№5**

1.Вспортивномлагере100человек,занимающихсяплаванием,легкойатлетикойилыжами.Изних10занимаютсяиплаванием,илегкойатлетикой,илыжами,18–плаваниемилегкойатлетикой,15–плаваниемилыжами,21–легкойатлетикойилыжами.Числоспортсменов,занимающихсяплаванием,равночислуспортсменов,занимающихсялегкойатлетикой,иравночислуспортсменов,занимающихсялыжами.Найтиэточисло.

2.Упростить:(*A*∪*B*)∪(*A*∪*B*).

3.Найтивсеподмножествамножества*A*={1,2,3,4).

4.Придуматьпримермножеств*А,В,С*,каждоеизкоторыхимеетмощностьконтинуума,так,чтобывыполнялосьравенство:*А*∪*В*=*С*.

5.Доказать,чтомножестваточекконтуроввсехтреугольниковэквивалентны.

**Вариант№6**

1.Группестудентовпредложенотриспецкурса:помультимедиа,искусственномуинтеллектуиимитационномумоделированию.22студентазаписалисьнаспецкурспомультимедиа,18–наспецкурспоискусственномуинтеллекту,10–наспецкурспоимитационномумоделированию,8–наспецкурсыпомультимедиаиискусственномуинтеллекту,15–наспецкурсыпомультимедиаиимитационномумоделированию,7–наспецкурсыпоискусственномуинтеллектуиимитационномумоделированию.5студентовзаписалисьнавсетриспецкурса.Сколькостудентоввгруппе?

2.Верноилиневерноравенство:(*A*\*B*)∪(*A*⋂*B*)=*A*?

3.Придуматьпримермножеств*А,В,С*,каждоеизкоторыхимеетмощностьконтинуума,так,чтобывыполнялосьравенство:*А*∪*В*=*С*.

4.Придуматьпримермножеств*А,В,С*,каждоеизкоторыхимеетмощностьконтинуума,так,чтобывыполнялосьравенство:*А*∪*В*=*С*.

5.Эквивалентнылимножества*A*={*x*:*x*2-8*x*+15=0}и*B*={2,3}?

**Вариант№7**

1.Вовремясессии24студентагруппыдолжнысдатьтризачета:пофизике,математикеипрограммированию.20студентовсдализачетпофизике,10–поматематике,5–попрограммированию,7–пофизикеиматематике,3–пофизикеипрограммированию,2–поматематикеипрограммированию.Сколькостудентовсдаливсетризачета?

2.Упростить:(*A*∪*B*)∪(*A*⋂*B*).

3.Доказать,чтомножествоточек*A*={(*x*,*y*):*y*=⏐*x*⏐,-,–1≤*x*≤1}несчетно.

4.Придуматьпримермножеств*А,В,С*,каждоеизкоторыхимеетмощностьконтинуума,так,чтобывыполнялосьравенство:*А*∪*В*=*С*.

5.Эквивалентнылимножества*A*={*y*:*y*=*x*3,1<*x*<2}и*B*={*y*:*y*=3*x*,3<*x*<∞}?

**Вариант№8**

1. Вгруппепереводчиков15человеквладеетанглийскимязыком,19–французским,8–немецким.9переводчиковвладеютанглийскимифранцузскимязыком,7–английскиминемецким,6–французскиминемецким.4переводчикавладеютвсемитремяязыками.Сколькопереводчиковвгруппе?

2.Пользуясьравносильнымипреобразованиями,установить,верноилиневерноравенство:*А*\(*В*∪*С*)=(*А*\*В*)∪*С*?

3.Вкакомслучае*А**А*⋂*В*?

4.Придуматьпримермножеств*А,В,С*,каждоеизкоторыхимеетмощностьконтинуума,так,чтобывыполнялосьравенство:*А*∪*В*=*С*.

5.Эквивалентнылимножества*A*={*x*:*x*2–3*x*+2=0}и*B*={1,3}?

**Вариант№9**

1.Опросгруппыстудентовпоказал,что70%изнихлюбятходитьвкино,60%втеатр,30%наконцерты.Вкиноитеатрходят40%студентов,вкиноинаконцерты–20%,втеатринаконцерты–10%.Сколькостудентов(в%)ходятвкино,театринаконцерты?

2.Верноилиневерноравенство:(*A*⋂*B*)⋂(*A*∪*В*)=*В*?

3.Привестипримердвухмножеств*А*и*В*,таких,чтомощностьмножества*А*большемощностимножества*В*.

4.Придуматьпримермножеств*А,В,С*,каждоеизкоторыхимеетмощностьконтинуума,так,чтобывыполнялосьравенство:*А*∪*В*=*С*.

5.Эквивалентнылимножества*A*={*x*:*x*3–1=0}и*B*={*x*:*x*2–3*x*+2=0}?

**Вариант№10**

1.Вгруппе20учеников.Послемедицинскогоосмотранадополнительноеобследование14учениковбылинаправленыктерапевту,6–кокулисту,5–кортопеду.Ктерапевтуиокулистубылинаправлены3ученика,ктерапевтуиортопеду–3,кокулистуиортопеду–2.Сколькоучениковбылинаправленыктерапевту,окулистуиортопеду?

2.Упростить:(∪)\(*A*∪*B*).

3.Верноилиневерноравенство:(*A*⋂*B*)⋂(*A*∪*В*)=*В*?

4.Найтивсеподмножествамножества*O*={*c*,*d*}.

5.Эквивалентнылимножества*A*={(*x*,*y*):*y*=ln*x*,0<*x*<∞}и*B*={(*x*,*y*):*y*=sin*x*,–∞<*x*<∞}?

**Вариант№11**

1.Приобследованиирынкаспросаинспекторуказалвопросномлистеследующиеданные.Из1000опрошенных811покупаютжевательнуюрезинку"Дирол",752–"Орбит",418–"Стиморол",570–"Дирол"и"Орбит",356–"Дирол"и"Стиморол",348–"Орбит"и"Стиморол",297–всевидыжевательнойрезинки.Показать,чтоинспекторошибся.

2.Упростить:∪(*B*\(*A*∪*B*)).

3.Придуматьпримермножеств*А,В,С*,так,чтобывыполнялосьравенство:*А*∪*В*=*С*,причем*А*–конечное множество, *В*и*С*–счетные множества.

4.Найтивсеподмножествамножества*A*={*a*,*b*,*c*,*d*}.

5.Пусть*A*–множество целых чисел, а *B*–множество четных чисел. Какие из следующих отношений справедливы: а)*A*=*B*;б)*A~B*;в)*A⊃B*;г)*A⊇B*;д)*A⊄B*;е)*A∈B*.

**Вариант№12**

1.Всемучастникамавтопробеганеповезло.12изнихувязливпеске–пришлосьтолкатьмашину,8понадобиласьзаменаколеса,ушестерыхперегрелсямотор,пятероитолкалимашинуименяликолесо,четверотолкалимашинуиостужалимотор,троеменяликолесоиостужалимотор.Одномупришлосьиспытатьвсевидынеполадок.Сколькобылоучастников?

2.Пользуясьравносильнымипреобразованиями,установить,верноилиневерноравенство:*А*\(*В*⋂*С*)=(*А*\*В*)⋂*С*?

3.Доказать,чтомножествоточек*A*={*y*:*y*=2n,n=1,2,…}счетно.

4.Найтивсеподмножествамножества*A*={*m,n,h,d*}.

5.Эквивалентнылимножества*A*={(*x*,*y*):*y*=*x*3,1<*x*<2}и*B*={(*x*,*y*):*y*=3*x*,3<*x*<∞}?

**Вариант№13**

1.Из10участниковансамбляшестероумеютигратьнагитаре,пятеро–наударныхинструментах,пятеро–надуховых.Двумяинструментамивладеют:гитаройиударными–трое,ударнымиидуховыми–двое,гитаройидуховыми–четверо.Одинчеловекиграетнавсехтрехинструментах.Остальныеучастникиансамблятолькопоют.Сколькопевцоввансамбле?

2.Верноилиневерноравенство:⋂*С*)⋂⋂*С*∪⋂*С*?

3.Записатьрешениесистемынеравенств

x-2>0

x-5<0

ввидепересечениядвухмножеств.

4.Найтивсеподмножествамножества*G*={*a*,*c*,*d*}.

5.Доказать,чтомножества*A*={(*x*,*y*):*y*=*x*3,1<*x*<2}и*B*={*y*:*y*=3*x*,3<*x*<∞}эквивалентны.

**Вариант№14**

1.Воднойстуденческойгруппе10человекмогутработатьнаДельфи,10–наПаскале,6–наСи.Подваязыказнают:6человек–ДельфииПаскаль,4–ПаскальиСи,3–ДельфииСи.Одинчеловекзнаетвсетриязыка.Сколькостудентоввгруппе?

2.Верноилиневерносоотношение:*A*⋂⋂*C*⊂*A*∪*В*?

3.Придуматьпримермножеств*А,В,С*,так,чтобывыполнялосьравенство:*А*∪*В*=*С*, причем*А*,*В*,и*С*–счетные множества.

4.Найтивсеподмножествамножества*P*={*a*,*d*}.

5.Эквивалентнылимножества*A*={*y*:*y*=3*x*,0<*x*<∞}и*B*={*y*:*y*=3n,n=1,2,…}?

**Вариант№15**

1.Вденьавиациинааэродромевсехжелающихкаталинасамолете,планере,дельтаплане.Насамолетепрокатились30человек,напланере–20,надельтаплане–15.Инасамолете,инапланерекаталось10человек,насамолетеидельтаплане–12,Напланереидельтаплане–5.Двачеловекапрокатилисьинасамолете,инапланере,инадельтаплане.Сколькобыложелающихпрокатиться?

2.Верноилиневерноравенство:(*A*∪*B*)\*A*=*B*\*A*?

3.Привестипримердвухмножеств*А*и*В*,таких,чтомощностьмножества*А*большемощностимножества*В*.

4.Найтивсеподмножествамножества*H*={*c*,*d*}.

5.Доказать,чтомножества*A*={*y*:*y*=ln*x*,0<*x*<∞}и*B*={*y*:*y*=sin*x*,–∞<*x*<∞}эквивалентны.

**Вариант№16**

1.Всегрибникивернулисьдомойсполнымикорзинами.Удесятерыхизнихвкорзинахбылибелыегрибы,увосемнадцати–подберезовики,удвенадцати–лисички.Белыеиподберезовикибылившестикорзинах,белыеилисички–вчетырех,Подберезовикиилисички–впяти.Всетривидагрибовбылиудвухгрибников.Сколькобылогрибников?

2.Верноилиневерноравенство:(*A*∪*B*)\(*A*⋂*B*)=*A*⋂∪⋂*B*?

3.Доказать,чтомножествоточек*A*={(*x*,*y*):*y*=⏐*x*⏐,-,–1≤*x*≤1}несчетно.

4.Найтивсеподмножествамножества*A*={*a*,*b*,*c*,*d*}.

5.Пусть*A*–множество точек отрезка[0,1],а*B*–множествовсехточекчисловойоси.Какиеизследующихотношенийсправедливы:а)*A*=*B*;б)*A~B*;в)*A⊃B*;г)*A⊇B*;д)*A⊄B*;е)*A∈B*.

**Вариант№17**

1.Всетуристывзяливпоходконсервы.Шестьчеловеквзялитушенку,пять–сгущенку,восемь–кашу(смясом).Утроихврюкзакахбылатушенкаисгущенка,удвоих–тушенкаикаша,утроих–сгущенкаикаша,итольководномрюкзакележаливсетривидаконсервов.Сколькобылотуристов?

2.Верноилиневерноравенство:⋂*С*⋂*С*\(*С*⋂(*A*∪*B*))?

3.Пусть*A*–множестворешенийуравнения*x*2–3*x*+2=0.Записатьэтомножестводвумяразличнымиспособами.

4.Найтивсеподмножествамножества*A*={*a*,*d*}.

5.Эквивалентнылимножества*A*={*x*:*x*2–3*x*+2=0}и*B*={2,3}?

**Вариант№18**

1.Былоопрошено70человек.Врезультатеопросавыяснили,что45человекзнаютанглийскийязык,29–немецкийи9–обаязыка.Сколькочеловекизопрошенныхнезнаетнианглийского,нинемецкогоязыков?

2.Верноилиневерноравенство:(*A*∪*B*)\(*A*⋂*B*)=*A*⋂∪⋂*B*?

3.Найтивсеподмножествамножества*F*={*a,b,c,d,e,f*}.

4.Пусть*A*–множестворешенийуравнения*x*2–3*x*+2=0.Записатьэтомножестводвумяразличнымиспособами.

5.Счетнолимножество{(*x*,*y*):*y*=3*x*,0<*x*<∞}?

**Вариант№19**

1.Втуристическойгруппе10человекзнаютанглийскийязык,10–итальянский,6–испанский.Подваязыказнают:6человек–английскийиитальянский,4–английскийииспанский,3–итальянскийииспанский.Одинчеловекзнаетвсетриязыка.Сколькотуристоввгруппе?

2.Упростить.

3.Привестипримердвухмножеств*А*и*В*,таких,чтомощностьмножества*А*большемощностимножества*В*.

4.Найтивсеподмножествамножества*A*={*x*,*y*,*r,f,d*}.

5.Эквивалентнылимножества*A*={2*n*,*n*=1,2,…}и*B*={*n*2,*n*=1,2,…}?

**Вариант№20**

1.Предприятиеобъявилонаборрабочихнадолжноститокаря,слесаряисварщика.Вотделкадровобратились25человек.Изних10человеквладелипрофессиейтокаря,15–слесаря,12–сварщика.Профессиейитокаряислесарявладели6человек,итокаря,исварщика–5человек,ислесаряисварщика–3человека.Сколькочеловеквладеютвсемитремяпрофессиями?

2.Верноилиневерноравенство:\=\?

3.Привестипримерымножеств*А*,*В*и*С*,длякоторыходновременновыполняютсяравенства*А*∪*В*∪*С*=*А*и*А*⋂*В*⋂*С*=*С*.

4.Найтивсеподмножествамножества*A*={*x*,*z*}.

5.Можнолипостроитьвзаимно-однозначноесоответствиемеждумножествомрациональныхчиселотрезка[0,1]имножествомрациональныхчиселизэтогоинтервала?Ответобосновать.

**Вариант№21**

1.Оказалось,чтовгруппетуристов15человекбылираньшевоФранции,19–вИталии,8–вГермании.9туристовбыливоФранцииивИталии,7–воФранцииивГермании,6–ивИталии,ивГермании.4туристабыливовсехтрехстранах.Сколькотуристовбылихотябыводнойизтрехстран?

2.Пользуясьравносильнымипреобразованиями,установить,верноилиневерноравенство:*А*\(*В*⋂*С*)=(*А*\*В*)⋂?

3.Привестипримерымножеств*А*и*В*,длякоторыхравенство∪*В*=

а)выполняется;б)невыполняется.

4.Найтивсеподмножествамножества*S*={*x*,*y*,*z,t,e*}.

5.Найтимощностьмножестваточекокружностисцентромвточке(0,0)ирадиусом1.

**Вариант№22**

1.Группестудентовиз30человекбылапредложенаконтрольнаяработаизтрехзадач.Первуюзадачурешили15студентов,вторую–13,третью–12.Первуюивторуюзадачирешили7человек,первуюитретью–6,вторуюитретью–5человек.Всетризадачирешили2студента.Сколькостудентовизгруппынерешилиниоднойзадачи?

2.Пользуясьравносильнымипреобразованиями,установить,верноилиневерноравенство:*А*\(*В*∪*С*)=(*А*\*В*)⋂?

3.Привестипримердвухбесконечныхмножеств*А*и*В*,таких,чтомощностьмножества*А*большемощностимножества*В*.

4.Найтивсеподмножествамножества*D*={*y*,*z*}.

5.Найтимощностьмножестваточекгиперболы*y*=при*x*∈(3,∞).

**Вариант№23**

1.Анализисторийболезнейгруппыиз20детейпоказало,что10детейболеливетрянкой,6–корью,5–свинкой.Ветрянкойикорьюболели3ребенка,ветрянкойисвинкой–3,корьюисвинкой–2.Всемитремяболезнямиболелодинребенок.Сколькодетейнеболелиниоднойизперечисленныхболезней?

2.Верноилиневерноравенство:⋂*С*)⋂⋂⋂*С*?

3.Доказать,чтомножествоточек*A*={(*x*,*y*):*y*=⏐*x*+1⏐,–1≤*x*≤1}несчетно.

4.Найтивсеподмножествамножества*A*={*x*,*z*}.

5.Пусть*A*–множествоточекотрезка[1,2],а*B*–множествоточекинтервала(0,3).Какиеизследующихотношенийсправедливы:а)*A*=*B*;б)*A~B*;в)*A⊂B*;г)*A⊇B*;д)*A⊄B*;е)*A∈B*.

**Вариант№24**

1.Вкнижныйкиоскпривезлидляпродажи100книгПушкина,ЛермонтоваиТургенева.КнигиПушкинакупили60человек,книгиЛермонтова–50,книгиТургенева–30человек.КнигиПушкинаиЛермонтовакупили40человек,книгиПушкинаиТургенева–20,книгиЛермонтоваиТургенева–10человек.Пятьчеловеккупиликнигивсехтрехписателей.Сколькочеловекнекупилиниоднойизперечисленныхкниг?

2.Верноилиневерноравенство:\=\?

3.Привестипримерымножеств*А*,*В*и*С*таких,чторавенство*А*∪*В*∪*С*=*С*

а)справедливо;б)несправедливо.

4.НайтивсеподмножествамножестваВ={*x*,*y*,*z,k*}.

5.Можнолипостроитьвзаимно-однозначноесоответствиемеждумножествомнатуральныхчисел*N*имножествомдействительныхчиселотрезка[0,1]?Ответобосновать.

**Вариант№25**

1.Группанаучныхработниковсостоитиз100человек.Изних70человеквладеютанглийскимязыком,50–немецким,40–французским,30–английскиминемецким,25–английскимифранцузским,15–французскиминемецким.Хотябыодинязыкзнаеткаждыйнаучныйработник.Сколькочеловеквладеютвсемитремяязыками?

2.Упростить:(*A*\(*A*⋂*B*))∪*В*.

3.Привестипримерымножеств*А*,*В*и*С*так,чтобы*A∈B*,*В⊂С*.

4.Найтивсеподмножествамножества*С*={*x*,*y*}.

5.Можнолиутверждать,чтомножествовсехположительныхпятизначныхчиселсчетно?Ответобосновать.

**Вариант№26**

1.Накурсыиностранныхязыковзаписалось100человек.Оказалось,что70человекбудутизучатьанглийскийязык,60человек–французскийи30человек-немецкий.Английскийифранцузскийсобираютсяизучать40человек,английскийинемецкий–20,французскийинемецкий–10.Сколькостудентовбудутизучатьвсетриязыка?

2.Упроститьравенство:(*A*⋂*С*)\(*С*⋂(*A*∪*B*)).

3.Привестипримердвухразличныхбесконечныхмножеств*А*и*В*,таких,чтомощностьмножества*А*равнамощностимножества*В*.

4.Вкакомслучае*A*∪*B*=*А*⋂*В*?

5.Эквивалентнылимножества*A*={*x*:*x*3–1=0}и*B*={*x*:*x*2–3*x*+2=0}?

**Вариант№27**

Вкомандебегуновдесятьспортсменовбегаютнадлинныедистанции,восемнадцать–насредние,двенадцать–накороткие.Надлинныеисредниедистанциибегаютпятьспортсменов,насредниеикороткие–шесть.Надлинныеикороткиедистанциинебегаетникто.Сколькобегуноввкоманде?

2.Верноилиневерноравенство:∪*С*)⋂∪∪*С*?

3.Вкакомслучае*A*∪*B*=*А*⋂*В*?

4.Эквивалентнылимножества*A*={*x*:*x*3–1=0}и*B*={*x*:*x*2–3*x*+2=0}?

5.Можнолиутверждать,чтомножествовсехположительныхчиселимеетменьшуюмощность,чеммножествовсехдействительныхчисел?Ответобосновать.

**Вариант№28**

1.Встуденческойгруппе25человек.Чтобыполучитьдопускнаэкзаменподанномукурсунеобходимозащититькурсовуюработу,выполнитьлабораторнуюработуисдатьзачет.15студентовзащитиликурсовуюработу,20выполнилилабораторнуюработу,17сдализачет.Защитиликурсовуюработуивыполнилилабораторнуюработу12человек.Защитиликурсовуюработуисдализачет13человек.Выполнилилабораторнуюработуисдализачет16человек.Сколькостудентовдопущенокэкзамену?

2.Упростить:⋂(∪).

3.Привестипримердвухбесконечныхмножеств*А*и*В*,таких,чтомощностьмножества*А*меньшемощностимножества*В*.

4.Доказать,чтомножествоточек*A*={*y*:*y*=2n,n=1,2,…}счетно.

5.Эквивалентнылимножестворациональныхчиселотрезка[0,1]имножестворациональныхчиселизэтогоинтервала?Ответобосновать.

**Вариант№29**

1.Вклассе20детей.Изних10дополнительнозанимаютсявмузыкальнойшколе,6–теннисом,5–китайскимязыком.Музыкальнуюшколуизанятияпотеннисупосещаюттриребенка,музыкойикитайскимязыкомзанимаютсятрое,теннисомикитайскимязыкомдвое.Всемитремявидамидополнительныхзанятийзанимаетсяодинребенок.Сколькодетейнезанимаетсяниоднимизперечисленныхзанятий?

2.Пользуясьравносильнымипреобразованиями,установить,верноилиневерноравенство:*А*\(*В*∪*С*)=(*А*\*В*)⋂?

3.Доказать,чтомножествоточек*A*={*y*:*y*=2n,n=1,2,…}счетно.

4.Привестипримерымножеств*А*,*В*и*С*,длякоторыходновременновыполняютсяравенства*А*∪*В*∪*С*=*А*и*А*⋂*В*⋂*С*=*С*.

5.Эквивалентнылимножества*A*={(*x*,*y*):*y*=*x*2,1<*x*<2}и*B*={(*x*,*y*):*y*=2*x*,3<*x*<∞}?

**Вариант№30**

1.Вцехуимеется25станков,которыемогутвыполнятьтривидаопераций:А,ВиС.Изних10станковвыполняютоперациюА,15–В,12–С.ОперацииАиВмогутбытьвыполненына6станках,АиС–на5,ВиС–на3станках.Сколькостанковмогутвыполнятьвсетриоперации?

2.Верноилиневерноравенство:\=\?

3.Привестипримерымножеств*А*,*В*и*С*,длякоторыходновременновыполняютсяравенства*А*∪*В*∪*С*=*А*и*А*⋂*В*⋂*С*=*С*.

4.Доказать,чтомножествоточек*A*={*y*:*y*=2n,n=1,2,…}счетно.

5.Можнолипостроитьвзаимно-однозначноесоответствиемеждумножествомдействительныхчиселотрезка[0,1]имножествомдействительныхчиселинтервала(0,1)?Ответобосновать.

***Порядоквыполненияработы:***

1.Изучитьинструкциюкпрактическойработе.

2.Выполнитьзадание.

3.Оформитьотчет.

***Содержаниеотчета:***

1.Тема.

2.Цель.

3.Материальноеобеспечение.

4.Практическоезадание.

***Вопросыдлясамоконтроля:***

1.Пусть*a*∈*А*.Следуетлиотсюда,что{*a*}*А*?

2.Вкакомслучае*А**А*⋂*В*?

3.Назовитемножество,котороеявляетсяподмножествомлюбогомножества.

4.Можетлибытьмножествоэквивалентносвоемуподмножеству?

5.Мощностькакогомножествабольше:множестванатуральныхчиселилимножестваточекотрезка[0,1]?

Практическая работа№ 7 «Круги Эйлера решение задач»

***Цель:*** *научиться применять круги Эйлера в решении задач.*

***Заданиекработе:***

1. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества∪.
2. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества(*А*\*В*)*С*
3. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества(*А*\*В*)∪*С*
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества(*А*\*В*)∪(*А*\*С*).
5. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества(*А*\*В*)∪*С*.
6. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества(∪)\(*A*∪*B*).
7. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества *А*\(*ВС*).
8. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества(*AB*)∪(*C*\(*A*∪*B*)).
9. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества*A*(*B*∪*C*).
10. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества(*А*\*В*)*С*.
11. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества(*B*∪*C*).
12. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества*С*).
13. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества*С*∪*С*.
14. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества(*B*∪*C*).
15. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества(*BC)*\*A*.
16. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества*С*.
17. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества *С*\(*С*(*A*∪*B*)).
18. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества\.
19. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества*А*(*В*∪).
20. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества*АВ*.
21. Нарисовать диаграмм у Эйлера-Венна для множества(*BC)*\*A*.
22. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества\.
23. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества\.
24. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества*С*).
25. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества∪(*BC*).
26. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества\.
27. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества *A*∪*B*.
28. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества*С*.

***Порядок выполнения работы:***

1.Изучитьинструкциюкпрактическойработе.

2.Выполнитьзадание.

3.Оформитьотчет.

***Содержани еотчета:***

1.Тема.

2.Цель.

3.Материальноеобеспечение.

4.Практическоезадание.

***Вопросы для самоконтроля:***

1. Что такое логическая переменная?
2. Что такое логическая функция?
3. Что такое таблица истинности?
4. Что такое логический элемент?

Тема 5 Графы

*Практическая работа № 8 «Графы. Способы задания графов. Степени вершин»*

**Цель:** научиться задавать граф, вычислять степени вершин и цикломатическое число графа.

**Материальное обеспечение:** практическая работа.

**Общие теоретические положения**

Граф G - совокупность двух множеств: вершин V и ребер E, между которыми определено отношение инцидентности. Если |V(G)|=n, |E(G)|=m, то граф G есть (n,m) граф, где n - порядок графа, m - размерграфа.

Каждое ребро e из E инцидентно ровно двум вершинам v', v'', которые оно соединяет. При этом вершина v' и ребро e называются инцидентными друг другу, а вершины v' и v'' называются смежными.

Ребро (v',v'') может быть ориентированным и иметь начало (v') и конец (v'') (дуга ворграфе).

Ребро (v,v) называется петлей (концевые вершины совпадают).

Граф, содержащий ориентированные ребра (дуги), называется орграфом.

Граф, не содержащий ориентированные ребра (дуги), называется неографом.

Ребра, инцидентные одной паре вершин, называются параллельными или кратными.

Конечный граф - число вершин и реберконечно.

Пустой граф - множество ребер пусто (число вершин может быть произвольным).

Полный граф - граф без петель и кратных ребер, каждая пара вершин соединенаребром.

Локальная степень вершины - число ребер ейинцидентных.

В неографе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер (лемма о рукопожатиях). Петля дает вклад, равный 2 в степеньвершины.

В орграфе сумма входящих ребер всех вершин равна сумме исходящих ребер всех вершин и равна числу реберграфа.

Графы равны, если множества вершин и инцидентных им ребер совпадают.

Графы, отличающиеся только нумерацией вершин и ребер, называютсяизоморфными.

Способы заданияграфов:

* явное задание графа как алгебраическойсистемы;
* геометрический;
* матрицасмежности;
* матрицаинцидентности

Матрица инцидентности: По вертикали указываются вершины, по горизонтали - ребра. aij=1 если вершина i инцидентна ребру j, в противном случае aij=0. Если ребро - петля, то aij=2. Матрицей инцидентности (инциденций) ориентированного графа называется матрица, для которой aij=1, если вершина является началом дуги , aij= – 1, если является концом дуги , в остальных случаях aij=0.

Матрица смежности - квадратная симметричная матрица. По горизонтали и вертикали - все вершины. аij= число ребер, соединяющее вершины i,j. Матрицей смежности ориентированного графа называется матрица, для которой aij=1, если вершина является началом дуги, в остальных случаяхaij=0.

Плоский граф - граф с вершинами, расположенными на плоскости и непересекающимисяребрами.

Вершины графа, которые не принадлежат ни одному ребру, называютсяизолированными.

Пусть в графе m - число ребер, n- число вершин, p – [число компонент связности](http://nomies2011.narod.ru/graf/def/d18.html). Цикломатическим числом графа называют число V = m – n +p.

Компонента связности графа – некоторое множество вершин [графа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) такое, что для любых двух вершин из этого множества существует путь из одной в другую, и не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этогомножества.

Пример выполнения

Исходные данные:

1.Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, преобразовать граф в плоский, вычислить степени его вер- шин.

V = {1; 2; 3; 4; 5; 6}; E = {a; b; c; d; e}

E = {(1; 4); (2; 5); (2; 6); (3; 4); (3; 5)}

Решение:

1. Изобразим граф, соединив вершины: Ребро а соединяет вершины 1 и 4, b соединяет вершины 2 и 5 и т. д. Затем преобразуем этот граф вплоский:

**1 2 2**



**5**

**4**



**сd**

**6 3 63**

**b a e**

**5 4**

**1**

1. Составим матрицу смежности. В первом столбце и первой строке выпишем вершины. Ребру а инцидентны вершины 1 и 4, следовательно, в колонке 1 и строке 4 ставим 1, а также колонке 4 и строке 1 ставим 1. Ребру b инцидентны вершины 2 и 5, следовательно, в колонке 2 в строке 5 и колонке 5 строке 2 ставим 1 и т.д. Остальные ячейки таблицы содержатнули.
2. Составим матрицу инцидентности. В первом столбце выпишем вершины, первой строке – ребра. Ребру а инцидентны вершины 1 и 4, следовательно, в колонке а в строке 1 и строке 4 ставим 1. Ребру b инцидентны вершины 2 и 5, следовательно, в колонке b в строке 2 и строке 5 ставим 1 и т.д. Остальные ячейки таблицы заполняем нулями.

Матрицасмежности Матрицаинцидентности

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |  |  | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **1** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | **2** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | **3** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **4** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | **4** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **5** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | **5** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| **6** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | **6** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

1. Вычислим степенивершин:

ρ (1)= 1 ρ (2)= 2 ρ (3)= 2 ρ (4)= 2 ρ (5)= 2 ρ (6) =1

ρ (1) + ρ (2) + ρ (3) + ρ (4) + ρ (5) + ρ (6) = 10 = 2 · q

q = 5 (ребер 5)

1. Цикломатическое число графа: V = 1 + 5 – 6 =0

Исходные данные:

2.Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, преобразовать граф в плоский, вычислить степени его вершин.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** |
| **1** | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |
| **6** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# Решение:

1. Количество вершин – 6. V = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.
2. Ребро а выходит из вершины 2, т.к. в ячейке (2; 1) стоит 1, а приходит в вершину 1 (в ячейке (1; 1) находится -1) ит.д.

Получим множество E = {(2; 1); (6; 1); (4; 2); (2; 3); (4; 5); (6; 5)}

1. Изобразим граф, соединив вершины, этот граф уже плоский, т.к.ребра непересекаются:

**1 2**



**с**

**6** **a** **e**

**d3**

**b q**

**5 4**

1. Составим матрицусмежности.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **6** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

1. Вычислим степенивершин:

|  |  |
| --- | --- |
| ρ1 (1) = 0  ρ1 (2) = 2  ρ1 (3) = 0  ρ1 (4) = 2  ρ1 (5) = 0  ρ1 (6) = 2 | ρ2 (1) = 2  ρ2 (2) = 1  ρ2 (3) = 1  ρ2 (4) = 0  ρ2 (5) = 2  ρ2 (6) = 0 |

ρ1 (1) + ρ1 (2) + ρ1 (3) + ρ1 (4) + ρ1 (5) + ρ1 (6) = 6

ρ2 (1) + ρ2 (2) + ρ2 (3) + ρ2 (4) + ρ2 (5) + ρ2 (6) = 6

q = 6 (ребер 6)

1. Цикломатическое число графа: V = 1 + 6 – 6 =1

**Практическая часть**

Практическая работа№ 8 «Графы. Способы задания графов. Степени вершин»

***Цель****: научиться задавать граф, вычислять степени вершин и цикломатическое число графа*.

***Заданиекработе***

Вариант №1

1. Задать орграф, представленный множеством вершин и ребер, графи- чески и матрицами, вычислить степени его вершин.

Орграф V = {1; 2; 3; 4;5;6} E = {(1; 3); (1; 6); (2; 5); (3; 2); (3; 4); (4; 1); (4; 5); (5; 3); (6; 2)}

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** |
| **1** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Вариант №2

1. Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графи- чески и матрицами, вычислить степени его вершин.

Неограф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 5); (2; 3); (3; 1); (3; 4) (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 3)}

1. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** |
| **1** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **2** | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **3** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **4** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **5** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Вариант №3

1. Задать орграф, представленный множеством вершин и ребер, графи- чески и матрицами, вычислить степени его вершин.

Орграф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 4); (1; 5); (2; 1); (2; 3); (3;4);(4; 2); (4; 6); (5; 3); (6; 3)}

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** |
| **1** | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **3** | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 |
| **6** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 |

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

Вариант №4

1. Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графи- чески и матрицами, вычислить степени его вершин.

Неограф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 3); (2; 3); (3; 1); (3; 6); (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}

1. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** |
| **1** | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **2** | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **3** | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 |
| **6** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 |

Вариант №5

1. Задать орграф, представленный множеством вершин и ребер, графи- чески и матрицами, вычислить степени его вершин.

Орграф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 2); (1; 4); (2; 3); (3; 1); (3; 6);(4; 2); (4; 5); (5; 3); (6; 1)}

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** |
| **1** | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| **2** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **3** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **5** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Вариант №6

1. Задать орграф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, вычислить степени его вершин.

Орграф V = {1; 2; 3; 4;5; 6} E = {(1; 5); (1; 6); (2; 1); (3; 2); (3; 4); (4; 2); (5; 4); (5; 3); (6; 3)}

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** |
| **1** | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **2** | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| **6** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 |

Вариант №7

1. Задать орграф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, вычислить степени его вершин.

Орграф V = {1; 2; 3; 4; 5; 6} E = {(1; 6); (1; 5); (2; 1); (2; 4); (3; 5); (4; 1); (4; 6); (5; 6); (6; 3)}

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** |
| **1** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **2** | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **3** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **4** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **5** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Вариант №8

1. Задать неограф, представленный множеством вершин и ребер, графически и матрицами, вычислить степени его вершин.

Неограф V = {1; 2; 3; 4; 5;6} E = {(1; 2); (1; 3); (2; 3); (3; 1);(3;6); (4; 2); (4; 5); (4; 6); (5; 1)}

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** |
| **1** | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |
| **6** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

2. Задать граф, представленный матрицей инцидентности, алгебраически, графически и матрицей смежности, вычислить степени его вершин.

***Порядок выполнения работы:***

1.Изучитьинструкциюкпрактическойработе.

2.Выполнитьзадание.

3.Оформитьотчет.

***Содержание отчета:***

1.Тема.

2.Цель.

3.Материальноеобеспечение.

4.Практическоезадание.

***Вопросы для самоконтроля:***

1.Какиеоперацииназываютсябинарнымииунарными?Приведитепримерыунарныхибинарныхоперацийвматематике.

2.Пояснитеразницумеждутерминами“логическоевыражение”и“логическаяфункция”.

3.Чтотакоевычислимоелогическоевыражение?

4.Чтотакоетавтология?противоречие?Приведитепримеры.

5.Чтотакоеравносильныевыражения?

Тема 6 Логика предикатов

*Практическая работа № 9 «Логические операции над предикатами»*

*Практическая работа № 10 «Кванторные операции»*

**Цель:** научиться выполнять операции над предикатами; научиться ориентироваться в кваторах и выполнять над ними операции.

**Материальное обеспечение:** практическая работа.

**Общие теоретические положения**

1.Понятие предиката

Валгебрелогикивысказываниярассматриваютсякакнераздельныецелыеитолькосточкизренияихистинно­стиилиложности.Ниструктуравысказываний,ниихсодержаниенезатрагиваются.Втожевремяивнауке,ивпрактикеиспользуютсязаключения,суще­ственнымобразомзависящиекакотструктуры,такиотсодержанияиспользуемыхвнихвысказываний.

Например, в рассуждении «Всякий ромб-параллелограмм;*ABCD-*ромб; следовательно,*ABCD-*параллелограмм»посылкиизаключениеявляютсяэлемен­тарнымивысказываниямилогикивысказыванийисточкизренияэтойлогикирассматриваютсякакцелые,неделимые,безучетаихвнутреннейструктуры.Следовательно,алгебралогики,будучиважнойчастьюлоги­ки,оказываетсянедостаточнойванализемногихрассуждений.

Всвязисэтимвозникаетнеобходимостьврасширениилогикивысказываний,впостроениитакойлогическойсистемы,средствамикоторойможнобылобыисследоватьиструктурутехвысказываний,которыеврамкахлогикивысказыванийрассматриваютсякакэлементарные.

Такойлогическойсистемойявляетсялогикапреди­катов,содержащаявсюлогикувысказыванийвкаче­ствесвоейчасти.

*Логикапредикатоврасчленяетэлементарноевысказываниенасубъект(буквально—подлежащее,хотяоноиможетигратьрольдополнения)ипредикат(буквально-сказуемое,хотяономожетигратьирольопределения).*

*Субъект—*этото,очемчто-тоутверждаетсяввыс­казывании;*предикат-*этото,чтоутверждаетсяосубъекте.

Например,ввысказывании«7-простоечисло»,«7»-субъект,«простоечисло»-предикат.Этовысказываниеутверждает,что«7»обладаетсвойством«бытьпростымчислом».

Есливрассмотренномпримерезаменитьконкретноечисло7переменной*х*измножестванатуральныхчисел,тополучим*высказывательнуюформу«х-*простоечис­ло».Приоднихзначенияхх,(например,х=13,х=17)этаформадаетистинныевысказывания,апридругихзначенияхх(например*,х=*10,х=18)этаформадаетложныевысказывания.

Ясно, что эта высказывательная форма определяет функцию одной переменной х*,* определенной на множествеN,и принимающую значения из множества{1,0}.

Здесь предикат становится функциейсубъектаивыражаетсвойствосубъекта.

Определение.ОдноместнымпредикатомР(х)называетсяпроизвольнаяфункцияпеременногох,опреде­леннаянамножествеМипринимающаязначенияиз множества {1,0}.

*Множество М, на котором определен предикатP(х),называетс я областью определения предиката.*

*Множество всех элементов х∈М,прикоторыхпредикатпринимаетзначение«истина»,называетсямножествомистинностипредикатаР(х),тоестьмножествоистинностипредикатаР(х)-этомножество1р={х|х*∈М,*Р(х)=1}.*

Так,предикат-Р(х)-«х*-*простоечисло»определеннамножествеN,амножествоIр для него есть множество всех простых чисел.

ПредикатQ{x}*-*«sin*х=*0»определеннамножествеR,аегомножествоистинностиIq={x|x=πk;k∈Z}.

ПредикатF(x)*-*«Диагоналипараллелограммахперпендикулярны»определеннамножествевсехпараллелограммов,аегомножествомистинностиявляетсямножествовсехромбов.

Приведенныепримерыодноместныхпредикатоввы­ражаютсвойствапредметов.

Рассмотримпримерыпредикатов:

Р(х):«х2+1>0,x∈R»;областьопределенияпредикатаМ=Rиобластьистинности–тожеR,т.к.неравенствовернодлявсехдействительныхчисел.Такимобразом,дляданногопредикатаМ=Ip.Такиепредикатыназываютсятождественноистинными.

В(х):«х2+1<0,x∈R»;областьистинностиIp=∅,т.к.несуществуетдействительныхчисел,длякоторыхвыполняетсянеравенство.Такиепредикатыназываютсятождественноложными.

*Определение.ПредикатР(х),определенныйнамножествеМ,называетсятождественноистинным(тождественноложным),если1р=М(1р=∅).*

Предикатsin2x+cos2x=1–тождественноистинный,предикат-тождественноложный.

Естественнымобобщениемпонятияодноместногопредикатаявляетсяпонятиемногоместногопредиката,спомощьюкотороговыражаютсяотношениямеждупредметами.

Примеромотношениямеждудвумяпредметамиявляетсяотношение«меньше»(«больше»).ПустьэтоотношениевведенонамножествеZцелыхчисел.Ономожетбытьохарактеризовановысказывательнойфор­мой«х<у»(«х>y»)*,*гдех,у∈Z,тоестьявляетсяфункциейдвухпеременныхР(х,у),определеннойнамножествеZхZсмножествомзначений{1,0}.

*Определение.ДвухместнымпредикатомР(х,у)называетсяфункциядвухпеременныххиу(субъектыпредиката),определеннаянамножествеМ=М1×М2(х∈М1,у∈М2)ипринимающаязначенияизмножества{1,0}.*

Найдемзначенияпредиката«х<у»*,*гдех,у∈Zдляпар(2,1),(4,4),(3,7):

Вместохиуподставимуказанныезначения:Р(2,1)=0,т.к.2>1;Р(4,4)=0,т.к.4=4;Р(3,7)=1,т.к.3<7.областьюистинностиэтогопредикатаявляетсямножествовсехпарцелыхчисел,удовлетворяющихданномунеравенству.

Рассмотримэтотжепредикат,нособластьюопределенияM=R2,тогдаобластьегоистинностиможнопредставитьграфически:этовсеточкичастиплоскости(открытая,бесконечнаяобласть),лежащейнижепрямойу=х.

Ip

x

y

y = x

Вчислепримеровдвухместныхпредикатовможноназватьпредикаты:Q(х,у):«х=у»-предикатравенства,определенныйнамножествеМ=RхR,областьистинностикоторого–всеточкипрямойу=х:

у

х

Ip

ПредикатF(x,y):«х//у»-прямаяхпараллельнапрямойу,определенныйнамноже­ствепрямых,лежащихнаданнойплоскости.

Аналогичноопределяетсяn-местныйпредикат.

*Определение:n–местнымпредикатомназываетсяфункцияQ(x1,x2,…,xn),определеннаянамножествеМ=М1×М2×…×Мnипринимающаянаэтоммножествезначениеизмножества{1,0}.*

*ПредикатР(х)являетсяследствиемпредикатаQ(x)(Q(x)→P(x)),еслиIQ⊂IP.*

*ПредикатыP(x)иQ(x)равносильны(Q(x)↔P(x)),еслиIQ=IP.*

Дляn–местныхпредикатоввводятсяаналогичныепонятия.

Примеры:

1. НамножествеМ={3,4,5,6,7,8}заданыпредикатыP(x):«х–простоечисло»,Q(x):«х–нечетноечисло».Составитьтаблицыистинности.Равносильнылипредикатынамножествеа)М;б)L={2,3,4,5,6,7,8};в)К={3,4,5,6,7,8,9}?

Составимтаблицыистинностипредикатовнаданныхмножествах:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| М | Р(х) | Q(x) | L | Р(х) | Q(x) | K | Р(х) | Q(x) |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 | 4 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 4 | 0 | 0 | 5 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 5 | 1 | 1 | 6 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 6 | 0 | 0 | 7 | 1 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 7 | 1 | 1 | 8 | 0 | 0 |
|  |  |  | 8 | 0 | 0 | 9 | 0 | 1 |

НамножествеМIP=IQ,следовательно,наэтоммножествепредикатыравносильны.НамножествахLиКусловиеравносильностинесоблюдается.

1. Будутлипредикатыравносильныилиодинизнихявляетсяследствиемдругого,еслиобластьопределенияR?



ОбластьдопустимыхзначенийхиудляР(х,у):x>0иy>0;областьистинности–всеточкиветвигиперболыу=15/х,лежащейвпервойчетверти.ОбластьдопустимыхзначенийхиудляQ(х,у):x>0иy>0,илиx<0иy<0;областьистинности–всеточкиобеихветвейгиперболыу=15/х.

Значит,IP⊂IQипредикатQ(x)являетсяследствиемпредикатаР(х).

б)Р(х):«х2≤0»,Q(x):«2|x|=cosx».

ОбластьистинностипредикатаР(х):х=0,областьистинностипредикатаQ(x):х=0.

Значит,IP=IQипредикатыравносильны.

2.Логическиеоперациинадпредикатами

Предикаты,также,каквысказывания,принимаютдвазначенияистинаиложь(1,0),поэтомукнимприменимывсеоперациилогикивысказываний.

Рассмотримприменениеоперацийлогикивысказыва­нийкпредикатамнапримераходноместныхпредикатов.

Пустьнанекотороммножестве*М*определеныдвапредиката-Р(х)иQ(x).

*Определение:КонъюнкциейдвухпредикатовР(х)иQ(x)называетсяновыйпредикатР(х)ΛQ{x),которыйпринимаетзначение«истина»притехитолькотехзна­ченияхх∈М,прикоторыхкаждыйизпредикатовпри­нимаетзначение«истина»,ипринимаетзначение«ложь»вовсехостальныхслучаях.*

*ОбластьюистинностипредикатаP(x)ΛQ(x)являетсяобщаячастьобластейистинно­стипредикатовР(х)иQ(x),тоесть:IPΛQ=Iр⋂Iq.Соответствующаядиаграммаимеетвид:*

М

IP

IQ

IPΛQ

Примеры:

ДляпредикатовР(х):«х–четноечисло»иQ(x):«хкратно3»конъюнкциейP(x)ΛQ(x) являетсяпредикат«х-четноечислоихкратно3»,тоестьпредикат«хделитсяна6»иобластьистинностиIPΛQ=IP⋂IQ={2,4,6,…,2n,…}⋂{3,6,9,12,…,3n,…}={6,12,18,…,6n,…}.

*Определение.ДизъюнкциейдвухпредикатовР(х)иQ(x)называетсяновыйпредикатР(х)VQ(x),которыйпринимаетзначение«ложь»притехитолькотехзначе­нияхх∈М,прикоторыхкаждыйизпредикатовпри­нимаетзначение«ложь»ипринимаетзначение«истина»вовсехостальныхслучаях.*

*ОбластьюистинностипредикатаР(х)VQ(x)являетсяобъединениеобластейистинностипредикатовР(х)иQ(x),тоесть:IPVQ=Iр∪Iq.*

*Диаграмма:*

IP

IQ

M

Пример:ДляпредикатовР(х)иQ(x)областьюистинностиихдизъюнкцииявляетсяобъединениеихобластейистинности:

*IPVQ=Iр∪Iq=*{2,4,6,…,2n,…}∪{3,6,9,12,…,3n,…}={2,3,4,6,…,2n,3n,…}.

*Определение*. *Отрицанием предиката Р(х) называется новый предикат , который принимает значение «истина» при всех значениях х ∈ М, при которых предикат Р(х) принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях х ∈ М, при которых предикат Р(х) принимает значение «истина».*

*Из этого определения следует, что*

*Диаграмма:*

IP

CIP

Пример:составимпредикат**:«х–нечетноечисло»,егообластьистинности:

*Определение.ИмпликациейпредикатовР{х)иQ(х)называетсяновыйпредикатР(x)→Q(x),которыйявляетсяложнымпритехитолькотехзначенияхх∈М,прикоторыходновременноР(х)принимаетзначение«истина»,aQ(x)-значение«ложь»ипринимаетзначение«истина»вовсехостальныхслучаях.*

*Таккакприкаждомфиксированномх∈Мсправедливаравносильность*

Диаграмма:областиистинностисоответствуетзаштрихованнаячасть:

IP

IQ

CIP

Рассмотримнесколькопримеровнанахождениеобластейистинностипредикатов.

1.НамножествеМ={1,2,3,4,…,20}заданыпредикаты:

А(х):«хнеделитсяна5»,В(х):«х-простоечисло»,С(х):«хкратно3».Найтимножествоистинностипредиката:

НайдемобластиистинностипредикатовА(х),В(х)и-«хнекратно3»:

IA={1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,1,14,16,17,18,19};

IB={2,3,5,7,11,13,17,19};

CIc={1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20}.

Впредикатезаменимимпликацию:

Предикатусоответствуетформулаалгебрымножеств:



2.ИзобразитьнадиаграммеЭйлера–Веннаобластьистинностипредиката:а)

Сначалавыполнимпреобразования,рассматриваяпредикаткаквысказывание:

Предикатусоответствуетобластьистинности,определяемаяформулойалгебрымножеств:

С(IА⋂IB⋂IC).Диаграммаимеетвид:

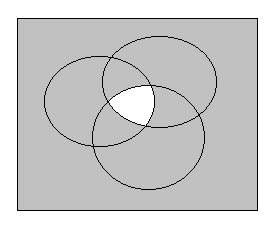
IA

IA∩IB∩IC

##### I

IB

IC



Областьистинностипредикатаокрашенасерымцветом.

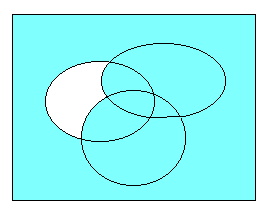


Выполнимпреобразования:



Предикатусоответствуетобластьистинности,определяемаяформулойалгебрымножеств:

CIP∪IQ∪IR⋂CIQ = (CIP∪IQ∪IR)⋂( CIP∪IQ∪CIQ) = (CIP∪IQ∪IR)⋂U = CIP∪IQ∪IR. Соответствующаядиаграмма:



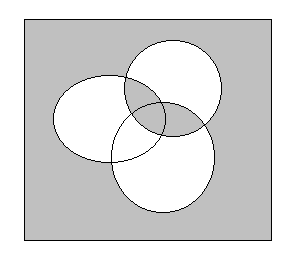
IQ

IP

IR

Областьистинностипредикатаокрашена.

3.Записатьпредикат,полученныйврезультателогическихоперацийнадпредикатамиP(x),Q(x),R(x),областиистинностикоторыхзаштрихованы:



IQ

IP

IR

ТаккакобластьистинностиI=C(IP∪IQ∪IR)∪IQ⋂IR∪IR⋂IP,топредикатимеетвид

4.Изобразитьнакоординатнойплоскостиобластьистинностипредиката



Выполнимпреобразования:

Областьистинностипредикатах≤2-частьплоскости,расположеннаялевеепрямойх=2ивсеточкиэтойпрямой(изобразимеесплошнойлинией).Областьистинностипредикатаx<y–частьплоскости,расположеннаявышепрямойу=хбезэтойпрямой(изобразимеепунктирнойлинией).Областьистинностиданногопредиката–пересечениеописанныхобластейистинности:

##### I

x

y

y=x

x = 2

б)((х>2)(y≥1))V((x<-1)(y<-2)).Составимсоответствующуюформулуалгебрымножеств,обозначив(x>2)=P(x,y),(y≥1)=Q(x,y),(x<-1)=R(x,y),(y<-2)=S(x,y):

I=IP⋂IQ∪IR⋂IS.Областьистинностизаштрихована:

y=-2

y=1

##### I

##### I

x

y

x=2

x=-1

IP∩IQ

IR∩IS

1. Кванторные операции.

ПустьимеетсяпредикатР(х),определенныйнамножествеМ.Если*а-*некоторыйэлементизмножестваМ,топодстановкаеговместохвпредикатР(х)превращаетэтотпредикатввысказывание-Р(а).Такоевысказыва­ниеназываетсяединичным.Нарядусобразованиемизпредикатовединичныхвысказыванийвлогикепредикатоврассматриваетсяещедвеоперации,которыепревращаютодноместныйпредикатввысказывание.

Кванторвсеобщности.ПустьР(х)—предикат,определенныйнамножествеМ.Подвыражением∀хР(х)понимаютвысказывание,истинное,когдаР(х)истинно

длякаждогоэлементахизмножестваМиложное,впротивномслучае.Этовысказываниеуженезависитотх.

Соответствующееемусловесноевыражениебудет:«ДлявсякогохР(х)истинно».Символ∀называюткванторомвсеобщности.

ПеременнуюхвпредикатеР(х)называютсвободной(ейможнопридаватьразличныезначенияизМ),ввысказывании∀хР(х)переменнуюхназываютсвязаннойквантором∀.

Кванторсуществования.ПустьР(х)—предикат,определенныйнамножествеМ.Подвыражением∃хР(х)понимаютвысказывание,котороеявляетсяистинным,еслисуществуетэлементх∈М,длякоторогоР(х)истинно,иложнымвпротивномслучае.Этовысказываниеуженезависитотх.

Соответствующееемусловесноевыражениебудет:«Существуетх,прикоторомР(х)истинно».Символ∃называют квантором существования. В высказывании ∃хР(х)переменная х связана квантором∃.

Приведемпримерупотреблениякванторов.ПустьнамножествеNнатуральныхчиселзаданпредикатР(х):«Числохкратно5».Используякванторы,изданногопредикатаможнополучитьвысказывания:∀х∈NР(х)-«Всенатуральныечислакратны5»;∃х∈NP(x)—«Су­ществуетнатуральноечисло,кратное5».Очевидно,пер­воеизэтихвысказыванийложно,автороеистинно.

Ясно,чтовысказывание∀хР(х)истиннотольковтомединственномслучае,когдаР(х)-тождественноистинныйпредикат,авысказывание∃хР(х)ложнотольковтомединственномслучае,когдаР(х)—тождествен­ноложныйпредикат.

Кванторныеоперацииприменяютсяикмногоместнымпредикатам.Пусть,например,намножествеМзадандвухместныйпредикатР(х,у).ПрименениекванторнойоперациикпредикатуР(х,у)попеременнойхста­витвсоответствиедвухместномупредикатуР(х,у)одноместныйпредикат∀xP(x,у}(илиодноместныйпредикат∃хР(х,у)),зависящийотпеременнойуинезависящийотпеременнойх.Книмможноприменитькванторныеоперациипопеременнойу,которыеприведутужеквысказываниямследующихвидов:

∀y∀xP(x,y),∃y∀xP(x,y),∀y∃xP(x,y),∃у∃хР(х,у).

Например,рассмотримпредикатР(х,у):«хкратноу»,определенныйнамножествеN.ПрименениекванторныхоперацийкпредикатуР(х,у)приводитквосьмивозможнымвысказываниям:

1.∀y∀xP(x,y)*-*«Длявсякого*у*идлявсякогох*у*являетсяделителемх».

2.∃y∀xP(x,y)*-*«Существует*у,*котороеявляетсяделителемвсякого*х».*

3.∀y∃xP(x,y)-«Длявсякого*у*существует*х*такое,что*х*делитсянау».

4.∃у∃хР(х,у)-«Существует*у*исуществует*х*такие,что*у*являетсяделителемх».

5.∀х∀уP(x,y)*-*«Длявсякого*х*идлявсякого*уу*являетсяделителем*х».*

6.∀х∃уP(x,y)*-*«Длявсякого*х*существуеттакоеу,что*х*делитсянау».

7.∃х∃уP(x,y)-«Существует*х*исуществует*у*такие,что*у*являетсяделителемх».

8.∃х∀уР(х,у)-«Существует*х*такое,чтодлявсякого*ух*делитсянау».

Высказывания1,5и8ложны,авысказывания2,3,4,6и7истинны.

Израссмотренныхпримероввидно,чтовобщемслучаеизменениепорядкаследованиякванторовизменяетсмыслвысказывания,азначит,иегологическоезначение(например,высказывания3и8).

Рассмотримпредикат–Р(х),определенныйнамно­жестве*М*={a1,a2,…,an},содержащемконечноечислоэлементов.Еслипредикат*Р(х)*являетсятождественноистинным,тоистиннымибудутвысказывания*P(a1),P(a2),…,P(an).*Приэтомистиннымибудутвысказывание∀хР(х)иконъюнкция*P(a1)P(a2)…P(an).*

Еслихотябыдляодногоэлемента*ak∈MP(ak)*окажетсяложным,толожнымибудутвысказывание∀хР(х)иконъюнкция*P(a1)P(a2)…P(an).*Значит,справедливаравносильность:

∀хР(х)≡*P(a1)P(a2)…P(an).*

Аналогичнымобразомможнодоказатьсправедливостьравносильности:

∃хР(х)≡*P(a1)VP(a2)V…VP(an).*

Значит,кванторныеоперацииможнорассматриватькакобобщениеоперацийконъюнкцииидизъюнкциинаслучайбесконечныхобластей.

Примеры:

1. Какиеизследующихвысказыванийтождественноложные,акакиетождественноистинные,еслиобластьопределенияМ=R?

а)∃х(х+5=х+3)–тождественноложноевысказывание,т.к.ниприкакомхравенствоневерно;

б)∀х(х2+х+1>0)–тождественноистинноевысказывание:левуючастьнеравенстваперепишемввиде(х+½)2+¾,этасуммабольшенуляприлюбомх;

в)∃х((х2–5х+6≥0)(х2–2х+1>0))–высказываниетождественноистинное,еслипересечениеобластейистинностилогическиумножаемыхпредикатовнепусто,иложное,впротивномслучае.

Первоенеравенствопредставимввиде(х–2)(х–3)≥0,решениемкоторогоявляютсях∈(-∞;2]∪[3;+∞).

Второенеравенствопредставимввиде(х–1)2>0.решениемкоторогоявляютсявсех≠0.

Пересечениеобластейистинности:(-∞;0)∪(0;2]∪[3;+∞)≠∅,значит,высказываниетождественноистинное.

1. ПредикатР(х,у):«x<y»определеннамножествеМ=N×N.

а)какиеизпредикатовтождественноистинные,какиетождественноложные:∃хР(х,у),∀хР(х,у),∃уР(х,у),∀уР(х,у)?

∃хР(х,у)–неявляетсянитождественноистинным,нитождественноложным:приу=1∃хР(х,у)=0,т.к.нетнатуральногочисламеньше1;приу>1∃хР(х,у)=1,например,х=1.значит,областьистинностипредикатау>1.

∀хР(х,у)–тождественноложныйпредикат,т.к.какоебыунезадать,срединатуральныхчиселнайдутсяте,которыебольшеилиравныу.

∃уР(х,у)–тождественноистинный,т.к.длявсякогокаждогонатуральногочисламожнонайтибольшеенатуральноечисло.

∀уР(х,у)–тождественноложный,т.к.какоебыхнезадать,срединатуральныхчиселнайдутсяте,которыеменьшеилиравных.

б)какиеизвысказыванийистинные,какиеложные:

∃х∀уР(х,у);∀х∃уР(х,у).

∃х∀уР(х,у)–ложноевысказывание,т.к.несуществуетнатуральногохменьшеголюбогонатуральногоу(дляу=1).

∀х∃уР(х,у)–истинноевысказывание,т.к.длялюбогонатуральногохсуществуетбольшеенатуральноечислоу.

1. ПредикатыА(х,у)иВ(у,z)определенынамножествеМхМ,гдеМ={a,b,c}.Записатьформулу∃xA(x,y)∀zB(y,z)безкванторныхопераций.Предикат∃xA(x,y)равносилендизъюнкцииA(a,y)vA(b,y)vA(c,y).Предикат)∀zB(y,z)равносиленконъюнкцииB(y,a)ΛB(y,b)ΛB(y,c).Тогдасправедливаравносильность:

∃xA(x,y)∀zB(y,z)≡(A(a,y)vA(b,y)vA(c,y))ΛB(y,a)ΛB(y,b)ΛB(y,c).

2. Формулы логики предикатов.

Влогикепредикатовбудемпользоватьсяследующейсимволикой:

1. Символы*р,q,r,...—*переменныевысказывания,принимающиедвазначения:1-истина,0—ложь.
2. Предметныепеременные-*х****,****у,z,*....которыепробегаютзначенияизнекоторогомножества*М;x°,у°,z°,*...-предметныеконстанты,тоестьзначенияпредметныхпере­менных.
3. *Р(.),F(.)*-одноместныепредикатныепеременные;*q(.,.,...,.),R(.,.,...,.)*n-местныепредикатныепеременные.*P0(.),Q0(.,.,…,.)*-символыпостоянныхпредика­тов.
4. Символылогическихопераций:Λ**,**v,→,-.
5. Символыкванторныхопераций:∀x,∃x.
6. Вспомогательныесимволы:скобки,запятые.

*Определениеформулылогикипредикатов:*

1. Каждоевысказываниекакпеременное,такипостоянное,являетсяформулой(элементарной).
2. ЕслиF(.,.,...,.)–n-местнаяпредикатнаяпеременнаяилипостоянныйпредикат,ах1,х2,…,хn-предметныепеременныеилипредметныепостоянные(необяза­тельновсеразличные),то*F(*х1,х2,…,хn*)*естьформула.Такаяформуланазываетсяэлементарной,внейпредметныепеременныеявляютсясвободными,несвязаннымикванторами.
3. Если*А*и*В*—формулы,причемтакие,чтооднаитажепредметнаяпеременнаянеявляетсяводнойизнихсвязанной,авдругой-свободной,тослова*А*v*В,А&В,А→В*естьформулы.Вэтихформулахтепеременные,которыевисходныхформулахбылисвободными,являютсясвободными,ате,которыебылисвязанными,являютсясвязанными.
4. Если*А-*формула,то*-*формула,ихарактерпредметныхпеременныхприпереходеотформулы*А*кформуленеменяется.
5. ЕслиА(х)*-*формула,вкоторуюпредметнаяпеременнаяхвходитсвободно,тослова∀xA(х)и∃хА(х)являютсяформулами,причемпредметнаяпеременнаявходитвнихсвязанно.
6. Всякоеслово,отличноеоттех,которыеназваныформуламивпунктах1-5,неявляетсяформулой.

Например,еслиР(х)иQ(x,у)-одноместныйидвухместныйпредикаты,аq,r-переменныевысказывания,тоформуламибудутслова:q,Р(х),P(x)Q(x°,y),

∀хР(х)→∃xQ(x,у),

Неявляетсяформулойслово:∀xQ(x,y)→Р(х).Здесьнарушеноусловиеп.3,таккаквформулу∀xQ(x,y)пе­ременнаяхвходитсвязано,авформулуР(х)переменнаяхвходитсвободно.

Выражение∀у(∃уР(х,у))VQ(x)неявляетсяформулой,т.к.кванторвсеобщностинаунавешаннаформулу∃уР(х,у),вкоторойпеременнаяуужесвязанакванторомсуществования.

Выражение∀у,хР(х,у)неявляетсяформулой,т.к.переменнойхнеприсвоенквантор.

Изопределенияформулылогикипредикатовясно,*чтовсякаяформулаалгебрывысказыванийявляетсяформулойлогикипредикатов.*

1. Значение формулы логики предикатов.

Ологическомзначенииформулылогикипредикатовможноговоритьлишьтогда,когдазаданомноже­ствоМ,накоторомопределенывходящиевэтуформулупредикаты.Логическоезначениеформулылогикипредикатовзависитотзначенийтрехвидовпеременных:1)значенийвходящихвформулупеременныхвысказываний,2)значенийсвободныхпредметныхпеременныхизмножестваМ,3)значенийпредикатныхпеременных.

Приконкретныхзначенияхкаждогоизтрехвидовпеременныхформулалогикипредикатовстановитсявысказыванием,имеющимистинноеилиложноезначение.

Рассмотримформулу∃y∀z(P(x,y)→P(y,z)).ДвухместныйпредикатР(х,у)определеннамножествеМхМ*,*гдеМ={0,l,2,...,n,..}.ВформулувходитпеременныйпредикатР(х,у),предметныепеременныех,у,z*,*двеизкоторыхуиz*—*связанныекванторами,ах*-*свободная.

ВозьмемзаконкретноезначениепредикатаР(х,у)фиксированныйпредикатР*0*(х,у):«х<у»,асвободнойпеременнойхпридадимзначениех0*=*5∈М.Тогдапризначенияху,меньших*х0=*5предикатР0(х0,y)при­нимаетзначениеложь,аимпликацияР(х,у)→Р(у,z)привсех*z*∈Мпринимаютзначениеистина,тоестьвысказывание∃y∀z(P0(x,y)→P0(y,z))имеетзначение«истина».

Рассмотримещепримернавычислениезначенияформулы.

Данаформула∀x(P(x)Q(x)→R(x)),гдепредикатыопределенынамножествеN.Найтиеезначение,еслиP(x):«хделитсяна3»,Q(x):«хделитсяна4»,R(x):«хделитсяна2».

Даннаяформулаявляетсявысказыванием,т.к.хсвязаннаяпеременная.Следовательно,значениеформулыбудетзависетьтолькоотзначенийпредикатныхпеременных.P(x)Q(x)-означает,чтохделитсяна12.ТогдапредикатP(x)Q(x)→R(x):«еслихделитсяна12,тохделитсяна2»-тождественноистинный,следовательноформула∀x(P(x)Q(x)→R(x)принимаетзначение«истина».

4. Равносильные формулы логики предикатов.

*Определение1.ДвеформулылогикипредикатовАиВназываютсяравносильныминаобластиМ,еслионипринимаютодинаковыелогическиезначенияпривсехзначенияхвходящихвнихпеременных,отнесенныхкобластиМ.*

*Определение2.ДвеформулылогикипредикатовАиВназываютсяравносильными,еслиониравносильнынавсякойобласти.*

Здесь,каквалгебревысказываний,дляравносильныхформулпринятообозначение*А≡В.*

Ясно,чтовсеравносильностиалгебрывысказыванийбудутверны,есливнихвместопеременныхвысказыванийподставитьформулылогикипредикатов.Но,крометого,имеютместоравносильностисамойлогикипредикатов.Рассмотримосновныеизэтихравносильностей.ПустьА(х)иВ(х)*-*переменныепредикаты,аС-переменноевысказывание.Тогда:

* + - 1. C&
      2. C
      3. C
      4. .

Справедливость первых двух равносильностей очевидна. Первая означает, что если не верно, что для любого х истинно А(х), значит, найдется такое х, что А(х) – не истина. Аналогичные рассуждения доказывают справедливость и второй равносильности. Равносильности 1 и 2 широко используются при преобразованиях с выражениями, содержащими отрицания.

Пример:Найтиотрицаниеформул

Решение

* 1. ;

= .

Докажемсправедливостькакой-либоизостальныхравносильностей,например,равносильности10:∃х(А(х)vB(x))≡∃xA(x)v∃xB(x).

Длядоказательствадостаточнорассмотретьдваслучая:

1. ПустьА(х)иВ(х)–тождественноложны.ТогдабудеттождественноложнымпредикатА(х)vB(x)ибудутложнымивысказывания∃хА(х)v∃xB(x),∃х(А(х)vB(x)).
2. Пустьтеперьхотябыодинизпредикатовнетождественноложный,например,А(х).ТогданебудеттождественноложнымпредикатА(х)vB(x),ибудутистиннымивысказывания∃хА(х),∃х(А(х)vB(x)),азначитистинныиисходныеформулы.

Аналогичнымобразомдоказываютсяиостальныеравносильности.

Отметим,чтоформула∀х[А(х)vВ(х)]неравносильнаформуле∀хА(х)v∀xB(x),аформула

∃х[А(х)ΛВ(х)]неравносильнаформуле∃хА(х)Λ∃хВ(х).Однако,справедливыравносильности:

Рассмотримещепримерыпримененияравносильныхпреобразований.

НамножествеМопределеныпредикатыА(х)иВ(х).Доказать,чтовысказывание∀хА(х)ложно,еслиистинновысказывание

Преобразуемформулу:



значит,∀хА(х)=0.

КакимусловиямудовлетворяютобластиистинностипредикатовА(х)иВ(х),определенныхнамножествеМ,еслиистинновысказывание:.



тогда∃хА(х)=0,значит,IA=∅,IB–любое подмножество области определенияМ.

**Практическая часть**

Практическая работа № 9 «Логические операции над предикатами»

***Задание к работе:***

1.Дляследующихпредложенийвыделитьпредикатыидлякаждогоизнихуказатьобластьистинности,еслиобластьопределениядляодноместногоМ=R,для двухместногоM=R2:

* 1. х+5=1;
  2. прих=2выполняетсяравенствох2–1=0;
  3. существуеттакоечислох,чтох2–2х+1=0;
  4. х2–2х+1=0;
  5. х+2<3x–4;
  6. однозначноечислохкратно3;
  7. (х+2)-(3х-4);
  8. х2+у2>0.

2.Какиеизпредикатовтождественноистинны?

* 1. х2+у2≥0;
  2. sin2x+cos2x=1;
  3. x2+1≥(x+1)2;
  4. х2+у2>0;
  5. (x+1)2>x-1.

3.Найтиобластиистинностипредикатов,еслих∈R:



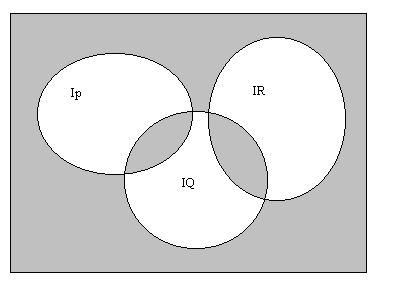
4.Изобразитьнадекартовойплоскостиобластиистинностипредикатов:

* 1. х+у=1;
  2. х+3у=3;
  3. sinx=siny;
  4. (x-2)2+(y+3)2=0;
  5. (x-2)2+(y+3)2≤4;
  6. ((x>2)v(y>1))((x<-1)v(y<-2)).

5.НамножествеМ={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}заданыпредикатыА(х):«хнеделитсяна5»,В(х):«х–четноечисло»,С(х):«хкратно3».Найтимножествоистинностипредиката:А(х)VB(x)→C(x).

6.ИзобразитьнадиаграммеЭйлера-Веннаобластьистинностипредиката:(P(x)→Q(x))VR(x)

7.Записатьпредикат,полученныйврезультателогическихоперацийнадпредикатамиP(x),Q(x),R(x):



9.Будутлипредикатыравносильны,илиодинявляетсяследствиемдругого?



***Порядок выполнения работы:***

1.Изучитьинструкциюкпрактическойработе.

2.Выполнитьзадание.

3.Оформитьотчет.

***Содержание отчета:***

1.Тема.

2.Цель.

3.Материальноеобеспечение.

4.Практическоезадание.

***Вопросы для самоконтроля:***

1. Структура простого высказывания.
2. Определение одноместного предиката.
3. Область истинностиодноместногопредиката.
4. Определение тождественноистинного(тождественноложного)предиката.
5. Определение двухместногопредиката.
6. Определениеn–местного предиката.
7. Какиепредикатыявляютсяравносильными?ВкакомслучаепредикатР(х)являетсяследствиемпредикатаQ(x)?
8. ПеречислитьлогическиеоперациинадпредикатамиипоказатьобластиистинностинадиаграммахЭйлера-Венна.

Практическая работа № 10 «Кванторные операции»

***Цель:*** *научиться ориентироваться в кваторах и выполнять над ними операции.*

***Задание к работе:***

1. Какиеизследующихвыраженийявляютсяформулами?Вкаждойформулевыделитьсвободныеисвязанныепеременные:
   1. p;
2. ДаныутвержденияА(n):«число*п*делитсяна3»,В(n):«число*п*делитсяна2»,С(n):«число*п*делитсяна4»,D(n):«число*п*делитсяна6»,Е(n):«число*п*делитсяна12».Укажите,какиеизследующихутверж­денийистинны,какиеложны:

3.Доказатьравносильности:

* 1. ∀х(А(х)→с)≡∃хА(х)→с;
  2. ∃хА(х)∃уВ(у)≡∃х∃у(А(х)В(х)).

4.КакимусловиямудовлетворяютобластиистинностипредикатовА(х)иВ(х),определенныхнамножествеМ,еслиистинновысказывание:

5.ПредикатыА(х,у)иВ(у,z)определенынамножествеМхМ,гдеМ={a,b,c}.Записатьформулу∃x∃уA(x,y)→∃у∀хB(х,у)безкванторныхопераций.

6.Дан предикат Q(x,y): «х делится на у». Какие из предикатов тождественно истинные и какие тождественно ложные: ∀хQ(x,y), ∃уQ(x,y), ∀уQ(x,y), ∃хQ(x,y). Найти значения высказываний: ∃х∃уQ(x,y): ∀у∃хQ(x,y): ∃у∀хQ(x,y): ∀х∀уQ(x,y).

***Порядок выполнения работы:***

1.Изучитьинструкциюкпрактическойработе.

2.Выполнитьзадание.

3.Оформитьотчет.

***Содержание отчета:***

1.Тема.

2.Цель.

3.Материальноеобеспечение.

4.Практическоезадание.

***Вопросы для самоконтроля:***

1. Какодноместныйпредикатможнопревратитьвединичноевысказывание?
2. Чтопонимаютподвыражением∀хР(х)?
3. Чтопонимаютподвыражением∃хР(х)?
4. Какимобразомдвухместныйпредикатпревратитьводноместныйи-ввысказывание?
5. Какойсимволикойможнопользоватьсявлогикепредикатов?
6. Сформулироватьопределениеформулылогикипредикатов.
7. Отчегозависитзначениеформулылогикипредикатов?
8. Сформулироватьобаопределенияравносильныхформуллогикипредикатов.
9. Какиеравносильностииспользуютсяприпостроенииотрицанийформул?
10. Закончитеравносильности:
    1. ∀х(А(х)ΛВ(х))≡…;
    2. ∃х(А(х)vB(x))≡…;
    3. Cv∀x(B(x))≡…;
    4. CΛ∀x(B(x))≡…;
    5. C→∀x(B(x))≡…;

**Библиографическийсписок**

Основные источники:

1. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.
2. Спирин М.С., Спирина П.А. Дискретная математика. – М.: Издательский центр «Академия», 2010.
3. Канцедал, С.А. Дискретная математика – М.: ИД ФОРУМ, НИЦ ИНФРА-М, 2013.
4. Клини С. Математическая логика. – М.: Издательство ЛКИ, 2008.
5. Игошин В.И. Задачник-практикум по математической логике. – М.: Издательский центр “Академия”, 2007.
6. Шапорев С.Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

Дополнительные источники:

1. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. – М.: , 1982.
2. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник. – М.: , 1975.
3. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. Лихтарников Л.М. Сукачёва Т.Г. Математическая логика. – СПб.: Лань, 1999.
5. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1976.